

פונקציות מרוכבות 1 – תרגול 6

21.03.11

פונקציות רציונליות

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

P, Q פולינומים (זרים).
 $R(z) : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ לכן נצטרך להגדיר באינסוף:

$$R(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = \begin{cases} \infty, & \deg P > \deg Q \\ 0, & \deg P < \deg Q \\ \frac{a_n}{b_m}, & \deg P = \deg Q \end{cases}$$

כאשר $\frac{a_n}{b_m}$ המנה בין המקדמים הראשיים.

הגדרה. הקטבים של R הם $\{z : R(z) = \infty\}$.

פירוק לשברים יסודיים

חלוקה עם שארית:

$$P(z) = A(z)Q(z) + B(z)$$

$$0 \leq \deg B \leq \deg Q$$

ואז

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = A(z) + \underbrace{\frac{B(z)}{Q(z)}}_{H(z)}$$

ואז $H(\infty)$ מספר סופי.

קיבלנו הצגה $R(z) = A_\infty(z) + H_\infty(z)$. נקרא החלק הסינגולרי של $R(z)$ ב- ∞ .
 $A_\infty(\infty) = \infty$ וסופי בכל נקודה אחרת. $R(\infty) = \infty \Leftrightarrow A_\infty(\infty) = \infty$. אחרת, אין חלק סינגולרי ב- ∞ .
כעת יהי u שורש של α (ולכן קוטב של R).

$$R_u(w) = R\left(u + \frac{1}{w}\right) = A_u(w) + H_u(w)$$

$$z = u + \frac{1}{w} \Leftrightarrow w = \frac{1}{z - u}$$

R_u היא פונקציה רציונלית חדשה עם הצגה ב- ∞ .

$$R_u = A_u \left(\frac{1}{z - u} \right) + H_u \left(\frac{1}{z - u} \right)$$

נסמן,

$$\tilde{A}_u(z) = A_u \left(\frac{1}{z - u} \right)$$

$$\tilde{H}_u(z) = H_u \left(\frac{1}{z - u} \right)$$

$$\tilde{H}_u(u) < \infty$$

$\tilde{A}_u$ - החלק הסינגולרי ב- u .
נתבונן בפונקציה

$$T(z) = R(z) - A_\infty(z) - \sum_u \tilde{A}_u(z)$$

פונקציית רציונלית.
 $\tilde{A}_u = \infty$ רק ב- u לכן $\sum_u \tilde{A}_u(\infty)$ סופי

$$R(z) - A_\infty(z) = H_\infty(z)$$

ולכן גם $R(\infty) - A_\infty(\infty)$ מספר סופי אז $T(\infty)$ סופי.
בכל קוטב u יקרא אותו דבר:

$$R(z) - \tilde{A}_u(z) + \sum \text{סופיים}$$

בכל $u, z \neq \infty$ כל המחוברים סופיים. לכן T פונקציה רציונלית ללא קטבים.
לכן T קבועה.

$$T = \frac{\tilde{P}}{\tilde{Q}(z)}$$

אם $\tilde{P}, \tilde{Q}$ זרים אז כל שורש של $\tilde{Q}$ הוא קוטב של T לכן $\tilde{Q}$ קבוע, לכן T פולינום. פולינום באינסוף הוא אינסוף אלא אם הוא קבוע.

$$R(z) = A_\infty(z) + \sum_u A_u \left(\frac{1}{z - u} \right) + c$$

אבל נהוג לכתוב:

$$R(z) = A_\infty(z) + \sum_u A_u \left(\frac{1}{z-u} \right)$$

(הקבוע נכנס ל- A_∞).

תרגיל. מצאו פירוק לשברים יסודיים של $R(z) = \frac{z^4}{(z-1)(z-2)^2}$

פתרון. $R(\infty) = \infty$, לכן נבודד את החלק הסינגולרי ב- ∞ .

$$\frac{z^4}{(z-1)(z-2)^2} = z + \underbrace{\quad}_{\text{פונקציה רציונלית סופית באינסוף}}$$

$$z^4 = z(z-1)(z-2)^2 + \underbrace{\quad}_{\text{איברים מדרגה } \geq 3}$$

$$A_\infty(z) = z$$

קטבים סופיים 1, 2.
עבור $u = 1$:

$$z = 1 + \frac{1}{w}$$

$$R(z) = \frac{(1 + \frac{1}{w})^4}{(\frac{1}{w}) \cdot (\frac{1}{w} - 1)^2} = \frac{(w+1)^4}{w(w-1)^2} = w + H_1(w) = \frac{1}{z-1} + \tilde{H}_1(z)$$

עבור $u = 2$:

$$z = 2 + \frac{1}{w}$$

$$R(z) = \frac{(2 + \frac{1}{w})^4}{(\frac{1}{w} + 1) \frac{1}{w^2}} = \frac{(2w+1)^4}{(w+1)w} = 2^4 w^2 + cw + \underbrace{\quad}_{\text{סופי באינסוף}}$$

נמצא את C : $(2w+1)^4 = (16w^2 + cw + \dots)w(w+1)$
 לפתוח סוגריים, להשוואות מקדם ליד w^3 . נקבל $c = 16$.
 אז $R(z) = 16 \frac{1}{(z-2)^2} + 16 \frac{1}{z-2} + \tilde{H}_2(z)$
 סה"כ

$$R(z) = \underbrace{z}_{A_\infty} + \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{A_1} + \underbrace{\left(\frac{16}{(z-2)^2} + \frac{16}{z-2} \right)}_{A_2} + D$$

את D מוצאים ע"י הצבה לדוגמא $z = 0$. $D = 5$.

הגדרה. $\deg(R(z)) = \max(\deg P, \deg Q)$. עבור $a \in \mathbb{C}$.
 ריבוי של אפס ב- $z = a$ זה ריבוי של האפס של P ב- $z = a$.
 ריבוי של קוטב ב- $z = a$ זה ריבוי האפס של Q ב- $z = a$.
 עבור $a = \infty$ ריבוי האפס/קוטב של $R(z)$ ב- ∞ הוא ריבוי האפס/קוטב של $R(\frac{1}{z})$ ב- 0 .
משפט. R מקבלת את הערך $0, \infty$ (כולל ריבוי) מספר זהה של פעמים.

הוכחה. אם $\deg P < \deg Q$:
 יש $\deg P$ -אפסים סופיים ו $\deg Q - \deg P$ ריבוי של אפס באינסוף נוספים. יש $\deg Q$ קטבים סופיים.

אם $\deg P = \deg Q$: יש $\deg P$ אפסים סופיים $\deg Q$ קטבים סופיים.

אם $\deg P > \deg Q$: יש $\deg P$ אפסים סופיים. יש $\deg Q$ קטבים סופיים ו-
 $\deg P - \deg Q$ קטבים נוספים.
 ריבוי של קוטב באינסוף
 בכל מקרה יוצא $\deg R$.

□

מסקנה. למשוואה $R(z) = a$ יש $\deg R$ פתרונות כולל ריבוי לכל a .

התכנסות במידה שווה

הגדרה. $f_n, f : A \rightarrow \mathbb{C}$. $f_n(z) \rightarrow f(z)$ במידה שווה אם:

$$\sup_A |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

הגדרה. $f_n, f : U \rightarrow \mathbb{C}$, U קבוצה פתוחה. $f_n \rightarrow f$ במ"ש מקומית אם לכל $z_0 \in U$ יש סביבה $U_0 \subset U$ כך ש- $f_n(z) \rightarrow f(z)$ במ"ש ב- U_0 .

תרגיל. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - R^2}$ מתכנס במידה שווה מקומית ב- $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

הוכחה. נבחר $R > 0$ ונתבונן בסביבה $U_R = \{z \mid |z| < R\}$.
 יש התכנסות במידה שווה ב- U_R .

מכאן שכל $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ מוכלת ב- U_R עבור R גדול מספיק. זה יוכיח התכנסות במ"ש מקומית ב- $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
 מדוע יש התכנסות ב- U_R ?

$$\sum \left| \frac{1}{z^2 - R^2} \right| = \sum \frac{1}{R^2} \left| 1 - \left(\frac{z}{n} \right)^2 \right|$$

$$\left| 1 - \left(\frac{z}{n} \right)^2 \right| \geq \left(1 - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{3}{4}$$

עבור $n > 2R$.

□

לפי M בוחן של וירשטראס יש התכנסות במ"ש ב- U_R .