

פונקציות מרוכבות 1 – תרגול 5

21.03.11

פונקצית האקספוננט, פונקציות טריגונומטריות

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

תרגיל.

$$|\sin z|^2 = \underbrace{\cosh^2}_{\geq 1} - \underbrace{\cos^2 x}_{\leq 1} \geq 0$$

הוכחה.

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \cdot \overline{\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}} = \frac{1}{4}(e^{iz} - e^{-iz})(e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}}) = \\ &= \frac{1}{4}(e^{i2iy} - e^{i2ix} - e^{-2ix} + e^{-i2i2}) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2y} + e^{-3y}}{2} - \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2}(\cosh 2y - \cos 2x) = \frac{1}{2}(2 \cosh^2 y - 1 - (2 \cos^2 x - 1)) = \cosh^2 y - \cos^2 x \end{aligned}$$

□

הערה. באופן כללי זהויות טריגונומטריות נשמרות: $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$ (ונוכיח את זה בהמשך). אי-שוויון לא נשמרים (ממשפט לאוביל שעוד לא למדנו).

e^z מעבירה לקורדינטות קוטביות:

$$(x, y) \mapsto (\underbrace{e^x}_{=r}, \underbrace{y}_{=\theta})$$

העתקות ביהולומורפיות

העתקה f הולומורפית חח"ע ועל, f^{-1} גם הולומורפית. מספיק: f הולומורפית והפיכה, אוטומטית f^{-1} הולומורפית. ב- $\mathbb{R}$ ייתכן שלא: $x \mapsto x^3$ היא חח"ע ועל חלקה C^∞ . ההפכו $x \mapsto x^{1/3}$ בכלל לא גזירה. **תרגיל.** מצאו העתקה ביהולומורפית:

$$f : D = \{x < 0, 0 < y < 2\pi\} \rightarrow \Omega = \{|z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\} = \{r > 1, 0 < \theta < \pi\}$$

פתרון.

$$f = -z \circ \frac{1}{z} \circ e^z \circ \frac{z}{2}$$

סה"כ:

$$f(z) = -e^{-z/2}$$

תרגיל. למצוא:

$$f : \mathbb{C} \setminus [-1, 1] \rightarrow \mathbb{D}$$

ביהולומורפית.

פתרון. נתבונן בספירת רימן. נמצא קודם העתקת מוביוס $\mathbb{C} \setminus [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$.

$$-1 \rightarrow 0 \quad 1 \rightarrow \infty \quad 0 \rightarrow -1$$

$$f_1(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

אנחנו יודעים להעתיק חצי מישור לדיסק היחידה. ננסה להעביר את $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{D}$. $z \mapsto z^\alpha$ העתקה הולומורפית עבור $\alpha \neq 0$. נפעיל העתקת חזקה כדי להעביר: $\{-\pi < \theta < \pi\} \rightarrow \{0 < \theta < \pi\}$.

$$\sqrt{z} : \{-\pi < \theta < \pi\} \rightarrow \{-\pi/2 < \theta < \pi/2\} = \{\operatorname{Re} z\}$$

הכפלה ב- i תעביר ל- $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ ואז עוד העתקת מוביוס מהצורה $\frac{z-i}{z+i}$ תעביר לפנים עיגול היחידה. נשאר להרכיב את כל ההעתקות ונקבל:

$$w = z - \sqrt{z^2 - 1}, \quad \underbrace{\sqrt{-2} = \sqrt{2}i}_{\text{בחירת הענף של השורש}}$$

בשביל התמונה של ∞ צריך להשתמש בביטוי:

$$w = \frac{\sqrt{-\frac{1+z}{z-1}} - i}{\sqrt{-\frac{z+1}{z-1}} + i}$$

CP^1 : העתקות מוביוס $CP^1 \simeq CP^1$, $z \mapsto z^\alpha$ לא הולומורפית - $0, \infty$. e^z לא מוגדרת ב- ∞ .

באופן כללי פונקציית חזקה משנה מפתח של גזרה זוויתית. מוביוס מעבירה בין דיסקים לחצי מישורים. e^z מעבירה מלבנים לגזרות.

ענפים של לוגריתם

הגדרה.

$$z \neq 0$$

$$\log z = \{w | e^w = z\}$$

ענף ראשי הוא:

$$\text{Log } z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\text{Log } z = \log |z| + i \arg(z), \quad -\pi < \arg z < \pi$$

בתחום D : כל שני ענפים של $\log z$, f_1, f_2 , $e^{f_1(z)} = z = e^{f_2(z)}$ נבדלים בכפולה שלמה של $2\pi i$.
קיום: כאשר ב- D אין מסילה סגורה סביב 0.

תרגיל. יש תחום G כך ש- $0 \notin G$, $f \in \text{Hol}(G)$, $f'(z) = \frac{1}{z}$ כמו כן $e^{f(z_0)} = z_0$ עבור $z_0 \in G$.
הוכיחו כי f היא ענף של $\log$.

$$e^{f(z)} = z \quad \text{הוכחה.}$$

$$h(z) = ze^{-f(z)} \quad \text{נגדיר}$$

$$h'(z) = e^{-f(z)} - zf'(z) + z'e^{-f(z)} = e^{-f(z)}(1 - zf'(z))$$

לכן $h'(z) = 0$ לכן h קבוע.

$$h(z) \equiv h(z_0) = 1$$

□