

פונקציות מרוכבות 1 – תרגול 4

07.03.11

מציאת פונקציה הרמונית צמודה

תרגיל. ראינו ש- $P(x, y) = a(x^2 - y^2) + bxy$ היא פונקציה הרמונית. מצאו את p^* .

פתרון. דרך 1: ניחוש מושכל:

$$f(z) = Az^2$$

כי הפונקציה שלנו היא ריבועית.

נסמן $A = \lambda + i\mu$ ונמצא λ, μ כך ש- $\operatorname{Re} f = p$.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (\lambda + i\mu)(x^2 - y^2 + 2ixy) = \\ &= \underbrace{2(x^2 - y^2 - 2\mu xy)}_{=p} + i(2\lambda xy + \mu(x^2 + y^2)) \end{aligned}$$

לכן נרצה:

$$p = a, \quad \mu = \frac{-b}{2}$$

ואז

$$p^* = 2\lambda xy + \mu(x^2 - y^2) = 2axy - \frac{b}{2}(x^2 - y^2)$$

כמובן שבאופן כללי זה יעבוד פחות טוב.

דרך 2: נחפש $Q = p^*$ כך ש-

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

לכן,

$$Q(x, y) - Q(x, 0) = \int_0^y \frac{\partial Q}{\partial y}(x, t) dt = \int_0^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^y (2ax + bt) dt$$

$$P(x, y) = a(x^2 - y^2) + 6xy$$

$$Q(x, y) = Q(x, 0) + 2axy + \frac{by^2}{2}$$

$$Q(x, 0) - Q(0, 0) = \int_0^x \frac{\partial Q}{\partial x}(t, 0) dt = - \int_0^x (-2ay + bt) dt = \frac{-bx^2}{2}$$

ואז,

$$Q(x, y) = \frac{-bx^2}{2} + 2axy + \frac{by^2}{2} + Q(0, 0)$$

כאשר $Q(0, 0)$ קבוע חיבורי כלשהו.

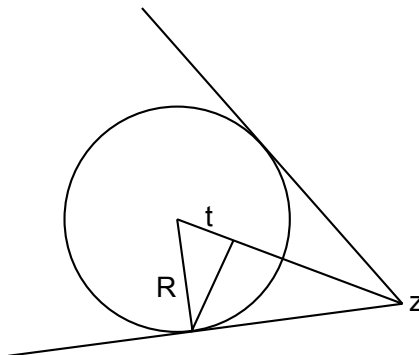
העתקות מוביוס

העתקה $\mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ כאשר $\mathbb{CP}^1$ היא ספירת רימן. $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ כאשר $ad \neq 0$ ונסמן $f(-\frac{d}{c}) = \infty, f(\infty) = \frac{a}{c}$.
פונקציה חח"ע ועל מספירת רימן על עצמה.
ראינו בכיתה:

- מעגל מוכלל עובר למעגל מוכלל.
 - קיימת ויחידה העתקה שמעבירה $(z_1, z_2, z_3) \rightarrow (w_1, w_2, w_3)$.
 - יחס כפול: $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \div \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$.
- באופן שקול, אם f העתקת מוביוס כך ש- $f(\infty) = z_1, f(0) = z_2, f(1) = z_3$ אז $z_4 = f((z_1, z_2, z_3, z_4))$.
וזה מסתדר טוב עם הטענה שהעתקות מוביוס שומרות יחס כפול.

סימטריה

C מעגל מוכלל ברדיוס R . נניח שמרכזו נמצא בראשית.



מדמיון משולשים:

$$\frac{R}{t} = \frac{|z|}{R} \Rightarrow t = \frac{R^2}{|z|}$$

$$\frac{R^2}{|z|} \frac{z}{|z|} = [z]_C^*$$

$$\frac{R^2 z}{z \bar{z}} = \frac{R^2}{\bar{z}}$$

לכן ביחס למעגל עם מרכז ב- w :

$$[z]_C^* = w + \frac{R^2}{\overline{w-z}}$$

משפט.

1. $(z_1, z_2, z_3, z_4) = ([z]_C^*, z_2, z_3, z_4)$ אז $z_2, z_3, z_4 \in C$.

2. העתקות מוביוס שומרות סימטריה:

$$[f(z)]_{f(C)}^* = f([z]_C^*)$$

3. $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ נמצאות על מעגל מוכלל אחד.

הוכחה.

1. העתקות מוביוס שומרות על יחס כפול, $|z_2 - w|^2 = R^2 \Leftrightarrow z_2 \in C$

$$\begin{aligned} \overline{(z, z_2, z_3, z_4)} &\stackrel{z=w}{=} \overline{(z-w, z_2-w, z_3-w, z_4-w)} = \\ &\stackrel{\bar{\cdot}}{=} (\overline{z-w}, \overline{z_2-w}, \overline{z_3-w}, \overline{z_4-w}) \stackrel{\frac{R^2}{\cdot}}{=} \\ &= \left(\frac{R^2}{\overline{z-w}}, \frac{R^2}{\overline{z_2-w}}, \frac{R^2}{\overline{z_3-w}}, \frac{R^2}{\overline{z_4-w}} \right) = \\ &= \left(\frac{R^2}{\overline{z-w}}, z_2-w, z_3-w, z_4-w \right) \stackrel{+w}{=} \underbrace{\left(w + \frac{R^2}{\overline{z-w}}, z_2, z_3, z_4 \right)}_{[z]_C^*} \end{aligned}$$

נראה גם כיוון הפוך: אם קיימות $z_2, z_3, z_4 \in C$ כך ש- $\overline{(z, z_2, z_3, z_4)} = (z', z_2, z_3, z_4)$ אז $z' = [z]_C^*$.

$$\frac{z-z_3}{z-z_4} \div \frac{z_2-z_3}{z_2-z_4} = \frac{z'-z_3}{z'-z_4} \div \frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$$

ואפשר לכתוב נוסחא: $z' = z'(z)$ כי העתקות מוביוס חח"ע. $[z]_C^*$ מקיים את השוויון ולכן $z' = [z]_C^*$.

2. נראה שהעקתות מוביוס שומרות סימטריה. עבור $z_2, z_3, z_4 \in C$

$$(z, z_2, z_3, z_4) = (f(z), f(z_2), f(z_3), f(z_4))$$

$$([z]_C^*, z_2, z_3, z_4) = (f([z]_C^*), f(z_2), f(z_3), f(z_4))$$

לפי הכיוון ההפוך של סעיף קודם: $[f(z)]_C^* = f([z]_C^*)$.

3. $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \{z_j\}$ על מעגל מוכלל אחד.

$\Rightarrow$ נניח שהן על C . נבחר העתקת מוביוס $f: C \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) \in \mathbb{R}$$

$\Leftarrow$ נעביר מעגל C דרך z_2, z_3, z_4 נראה שגם $z_1 \in C$.

$$([z_1]_C^*, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z_1, z_2, z_3, z_4)} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

לכן $[z_1]_C^* = z_1$, ולכן $z_1 \in C$.

□

איך מוצאים העתקות מוביוס?

$$f: (z_1, z_2, z_3) \rightarrow (w_1, w_2, w_3)$$

$$(z_1, z_2, z_3, z) = (f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z))$$

מעבירים אגפים ומוצאים נוסחא מפורשת ל- $f(z)$.

נניח שרוצים להעביר מעגל C_1 למעגל C_2 . אפשר להעביר מעגל C_1 למעגל C_2 ואפשר להעביר נקודה ספציפית על השפה לנקודה ספציפית על השפה ונקודה ספציפית מחוץ לשפה לנקודה ספציפית מחוץ לשפה. מדוע? יש 6 דרגות חופש ממשיות (אפשר להעביר שלשה של מרוכבים לשלשה של מרוכבים ולכל מרוכב שתי קורדינטות). נשתמש ב-3 כדי להעביר מעגל, 2 כדי להעביר נקודה מחוץ ועוד אחד כדי להעביר נקודה על השפה.

איך מוצאים העתקה כזאת?

$f(z_1) = w_1$ נקודות סימטריות נשמרות $f([z_1]_{C_1}^*) = [w_1]_{C_2}^*$. חזרנו למקרה הראשו בו צריך להעביר 3 נקודות ל-3 נקודות.

דוגמא.