

פונקציות מרוכבות 1 – תרגול 3

07.03.11

משוואות קושי רימן

תרגיל. f, g אנליטית בתחום $\text{Re } f = \text{Im } f$. הוכיחו $g = if + x_0$.
ראינו בשיעור שלפונקציה הולומורפית כל אחד מהבאים גורר שהיא קבועה:

$$\text{Re } f \equiv \text{const}$$

$$\text{Im } f \equiv \text{const}$$

$$|f| \equiv \text{const}$$

$$\arg f \equiv \text{const}$$

הוכחה. נגדיר $h = g + if$.

$$\text{Im}(h) = \text{Im}(g) - \text{Im}(if) = \text{Im } g - \text{Re } f = 0$$

ממסקנה מקושי-רימן $h \equiv x_0 \in \mathbb{R}$ ולכן $g = x_0 + if$.

□

תרגיל. $f = u + iv$ הולומורפית. $v = g(u)$ כאשר $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה. הוכיחו כי f קבועה.

הוכחה. $v = g(u)$.

$$\frac{\partial}{\partial x} : v_x = g'(u)u_x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} : v_y = g'(u)u_y$$

לפי קושי רימן:

$$g'(u)u_x + u_y = 0$$

$$g'(u)u_y - u_x = 0$$

$$\begin{pmatrix} g'(u) & 1 \\ -1 & g'(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = 0$$

$$\det = g'(u)^2 + 1 > 0$$

לכן

$$u_x = u_y = 0$$

לפי קושי רימן גם

$$v_x = v_y = 0$$

לכן,

$$v \equiv \text{const} \quad u \equiv \text{const}$$

□

ולכן $f \equiv \text{const}$.

תרגיל. נתון $|a|, |z| < 1$ הוכיחו

$$\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| < 1$$

הוכחה. נגדיר:

$$f(x) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad z \neq \frac{1}{\bar{a}}$$

צריך להראות

$$f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$$

כאשר $\mathbb{D}$ דיסק יחידה פתוח.

f רציפה.

טענה. $|f(z)| = 1 \Rightarrow |z| = 1$

$$w = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \Leftrightarrow z-a = w - \bar{a}wz \Leftrightarrow z(1+\bar{a}w) = w+a \Leftrightarrow z = \frac{w+a}{1+\bar{a}w}$$

במילים אחרות אם $w = f(z) \in S^1$ אז $z \in S_1$.

$$|z| = \left| \frac{w+a}{1+\bar{a}w} \right| = \frac{|w+a|}{|w^{-1}+\bar{a}||w|} \underbrace{=}_{|w|=1} \frac{|w+a|}{|w+a|} = 1$$

$\mathbb{D}$ תחום. לכן $f(\mathbb{D})$ היא קבוצה קשירה מסילתית. (פונקציה רציפה מעבירה קבוצה קשירה מסילתית לקבוצה קשירה מסילתית)

לכן אם ב- $f(\mathbb{D})$ יש נקודות w_1, w_2 $|w_1| < 1, |w_2| > 1$

$$|w| = 1 \xRightarrow{\text{טענה}} w = f(z), |z| = 1$$

הוכחנו כי $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ או ש- $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ ולכן מספיק לבדוק נקודה אחת: $a \in \mathbb{D}, |a| < 1, f(a) = 0$ לכן האופציה הראשונה.

□

פונקציות הרמוניות

הגדרה. פונקציה הרמונית $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש-

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

אינטואיטיבית לפלסיאן זה ההפרש בין ממוצע הפונקציה בסביבת הנקודה לערך שלה בנקודה.

תרגיל. מתי הפולינום $p = ax^2 + bxy + cy^2$ הוא פונקציה הרמונית?

הוכחה.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2ax + by \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 2cy + bx$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 2a \quad \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2c$$

ולכן

$$\Delta p = 0 \Leftrightarrow 2a + 2c = 0 \Leftrightarrow a = -c$$

ואז,

$$p(x, y) = a(x^2 - y^2) + bxy$$

□

הערה. הפונקציות ההרמוניות הן מרחב לינארי.

משפט.

1. $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית אז $u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$ פונקציות הרמוניות ב- D . ואז u, v נראות פונקציות הרמוניות צמודות.

אם ל- u יש צמודה v בתחום D ($f = u + iv$) אז v מוגדרת ביחידות עד כדי קבוע חיבורי.

2. עבור $D = \mathbb{C}$ תמיד יש פונקציה צמודה.

$$(\text{סימון } -\frac{1}{2}\text{-סטנדרטי } v = u^*).$$

תרגיל. $u(z) = \log |z|, \mathbb{C} \setminus \{0\}$. הוכיחו ש- u פונקציה הרמונית ללא פונקציה צמודה.

הוכחה. יש ללפלסיאן נוסחא בקורדינטות פולריות

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

נציב

$$\Delta \log \underbrace{|z|}_{=r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{1}{r} \right) = 0$$

נראה של- u אין פונקציה v צמודה. $f = u + iv$ הולומורפית ב- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. גם לקושי רימן יש צורה פולארית:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

ולכן

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

כלומר, v קבועה לאורך קרניים חיוביות דרך הראשית.

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = 1$$

ולכן

$$0 = v(e^{i2\pi}) - v(e^{i \cdot 0}) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta = 2\pi$$

□

וזו סתירה. לכן v לא קיימת.

חישובים עם $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\frac{\partial}{\partial z}$.

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

משוואות קושי רימן מקבלות את הצורה:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

בשיעורי בית נוכיח

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{g}}{\partial z}$$

תרגיל. $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ הולמורפית, $f' \neq 0$, הוכיחו כי $u = \log |f|$ היא פונקציה הרמונית.

הוכחה. מספיק להראות ש- $2u = \log |f|^2$ פונקציה הרמונית. משהו נחמד על הלפלסיאן:

$$\Delta = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z}$$

נחשב:

$$\Delta(2u) = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} (\log f \bar{f}) = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\frac{\partial}{\partial z} (f \bar{f})}{f \bar{f}} = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\frac{\partial f}{\partial z} \bar{f} + f \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}}{f \bar{f}}$$

נסוחא מתרגיל בית:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

כי f הולמורפית ומקושי רימן.

$$= 5 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{f'}{f} \right) = 0$$

□

לכן $2u$ פונקציה הרמונית ולכן גם u .