

## פונקציות מרוכבות 1 – תרגול 14

14.6.11

תרגיל. חשבו

$$\int_0^\infty \left( \frac{\sin x}{x} \right)^3 dx$$

פתרון.

$$\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

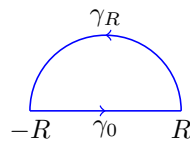
לכן,

$$\sin^3 z = \frac{3}{4} \sin z - \frac{1}{4} \sin 3z$$

לכן,

$$\int_0^\infty \left( \frac{\sin x}{x} \right)^3 dx = \int_0^\infty \left( \frac{3}{4} \frac{\sin x}{x^3} - \frac{1}{4} \frac{\sin 3x}{x^3} \right)$$

בעיה ש-  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^3} dx$  מתבדר לכן לא נוכל לחשב את האינטגרלים בנפרד.



נסמן

$$f(z) = \left( \frac{\sin z}{z} \right)^3$$

לכן

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$$

נסמן:

$$I = \int_0^\infty f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{\gamma_0} f(z) dz = \frac{1}{2} \int_{-\gamma_R} f(z) dz$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\gamma_R} \left( \frac{3}{4} \frac{\sin z}{z^3} - \frac{1}{4} \frac{\sin 3z}{z^3} \right) dz$$

ננסה להבין את  $\int_{\gamma_R} \frac{\sin z}{z^3} dz$

$$\int_{\gamma_R} \left( \frac{\sin z - z}{z^3} + \frac{z}{z^3} \right) dz = \int_{\gamma_R} \frac{\sin z - z}{z^3} + \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2}$$

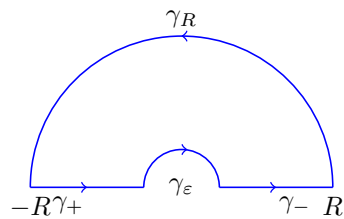
$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} \Big|_{-R}^R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

–1

בגלל שזה פונקציה אנליטית זוגית:

$$\int_{-\gamma_R} \frac{\sin z - z}{z^3} dz = \int_{\gamma_0} \frac{\sin z - z}{z^3} dz = \operatorname{Im} \int_{\gamma_0} \frac{e^{iz} - iz}{z^3} dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$$



ממשפט קושי  $0 = \int_{\gamma} g(z) dz$

$$|g(z) dz| \leq \pi R \cot \max_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z > 0}} \left| \frac{e^{iz} - iz}{z^3} \right| \leq \left| \frac{e^{-y} + |z|}{R^3} \right| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_{\gamma_-} = \int_{\gamma_+}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz &= \int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz} - yz}{z^3} = \int_{\gamma_\epsilon} \frac{1 + iz - \frac{z^2}{2} + z^3 h(z) - iz}{z^3} dz = \\ &= \int_{\gamma_\epsilon} \left[ -\frac{dz}{2z} + \frac{dz}{z^3} \right] + O(\epsilon) \end{aligned}$$

זה חצי מעגל ברביע העליון

$$= \frac{1}{2}\pi i + (-2)^{-1} \underbrace{\frac{1}{z^2} \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon}}_{=0} + O(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2}\pi i$$

לכן

$$\int_{\gamma_R} \frac{\sin x - x}{x^3} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}$$

לסיכום השלבים:

1. להחליף  $\sin z$  ב-  $e^{iz}$  (כי  $\sin z$  לא חסומה באף תחום סביר).
  2. לפעמים אינטגרל לא מתכנס אבל החלק הממשי/מדומה כן מתכנס.
  3. אפשר לחתוך חלק קטן סביב הנקודה הבעייתית (לא משפיע על החלק שמתכנס) ולחשב את האינטגרל המלא ע"י השלמה למסילה סגורה שאפשר לחסום/לחשב.
- תרגיל.**  $f: \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית,  $f(z) \notin [0, \infty)$ . הוכיחו ש-0 סינגולריות סליקה.
- פתרון.** סינגולריות סליקה  $\Leftrightarrow f$  חסומה סביב הנקודה  $\Leftrightarrow f(z) = o\left(\frac{1}{|z-p|}\right)$ . המעבר האחרון הוא תרגיל.
- קוטב  $\Leftrightarrow |f(z)| \xrightarrow{z \rightarrow p} +\infty$
- סינגולריות עיקרית  $\Leftrightarrow$  בכל סביבה  $U^*$  של  $p$ ,  $f(U^*) \subseteq \mathbb{C}$  צפופה.
- בדרך כלל בשביל להוכיח אחת האפשרויות, קל יותר לשלול את שאר האפשרויות מאשר להוכיח את התנאי.
- אז  $f(z) \notin [0, \infty)$  אז קיימת  $g(z) = \sqrt{f(z)}$  הולומורפית ב-  $D^*$  ע"י  $i = \sqrt{-1}$  אז  $\text{Image}(g) \subseteq \{\text{Im } z > 0\}$ .
- אם נראה של  $g$  יש סינגולריות סליקה ב-0 אז בפרט  $f$  חסומה סביב 0 ולכן 0 סליקה עבור  $f$ .
- ל-  $g$  אין סינגולריות עיקרית ב-0  $\Leftrightarrow \{\text{Im } z < 0\} \cap \text{Image}(g) = \emptyset$
- למה 0 לא קוטב עבור  $g$ ? סביב קוטב מסדר  $n$  קיימת הצגה  $g(z) = \frac{h(z)}{z^n}$ ,  $h(0) \neq 0$ .
- הולומורפית בסביבה של 0.  $\frac{1}{z^n}$  עושה  $n$  הקפות ברדיוס גדול.  $\frac{h(z)}{z^n} = \frac{h(0)}{z^n} + O\left(\frac{1}{z^{n-1}}\right)$ .
- קיימת  $z = \varepsilon e^{i\theta}$  כך ש-  $\frac{h(0)}{z^n} = -\frac{i}{\varepsilon^n}$  לכן  $O\left(\frac{1}{z^{n-1}}\right)$  לא מספיק כדי ש-  $\text{Im } z > 0$  אז  $g(z) \in \{\text{Im } z > 0\}$  וזו סתירה.
- דרך אלמנטרית לראות של-  $g$  אין קוטב ב-0. אחרת ל-  $h = \frac{1}{g}$  יש אפס ב-0. אם נסמן  $\gamma_\varepsilon = \{z \mid |z| = \varepsilon\}$  לפי ההנחה ו-  $\text{Im } z > 0$  פשוט קשר:

$$0 = \text{ind}(f \circ \gamma_\varepsilon, 0) = N(h, D_\varepsilon) \geq 1$$

**תרגיל.**  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית,  $|f| \leq 1$  כאשר  $|z| \leq 1$ .  $z_0$  אפס מסדר  $m$ . הוכיחו  $|f(0)| \leq |z_0|^m$ .

**פתרון.**  $\psi(z) = \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$ ,  $\psi(z_0) = 0$ .  $\psi$  הוא אפס פשוט עבור  $\psi$  ובנוסף  $|\psi(z)| = 1$ ,  $h(z) = \frac{f(z)}{\psi(z)^m}$ .  $h(z)$  פונקציה אנליטית כי ל-  $\psi$  אין אפסים נוספים.

$$|z| = 1 \Rightarrow |h(z)| = \frac{|f(z)|}{|\psi(z)|^m} = |f(z)| \leq 1$$

לכן מעקרון המקסימום  $|f(0)| \leq |\psi(0)|^m = |z_0|^m$ .

**תרגיל.**  $\sum_{j=1}^n (f_j)^2 = \text{const}$  שלמות. להכיח  $f_j$  קבועות.

$$\Delta(|f|^2) = 4|f'|^2$$

$$\Delta|f|^2 = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (f\bar{f}) = \dots = 4|f'|^2$$

$$4 \sum_{j=1}^N |f'_j|^2 = 0$$

לכן  $f'_j = 0$  ולכן  $f_j \cong \text{const}$ .

**תרגיל.**

1.  $f(z) = \sum z^{n!}$  פונקציה הולומורפית ב-  $D(0, 1)$ .

2.  $\lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{2\pi i \theta}) = \infty, \forall \theta \in \mathbb{Q}$ .

**פתרון.**

1. טור חזקות מגדיר פונקציה הולומורפית בתחום ההתכנסות שלו  $\{|z| < R\}$ .

$$R^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{R!} = 1$$

2. מספיק להראות שקיים  $N$  כך ש-  $\sum n = N^\infty r^{n!} e^{2\pi i n! \theta} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} \infty$

$\theta = \frac{p}{q}$ . נתחיל את הסכימה ב-  $N = q$  ואז  $N \geq n \implies e^{2\pi i n! \theta} = 1$  ונשאר להראות

$$\sum_{n=N}^\infty r^{n!} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} \infty$$

כמו קודם זה שקול לכך ש-  $f(r) = \sum_{n=1}^\infty r^{n!} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} \infty$

$$r^1 + r^{2!} + \dots + r^{N!} + \dots$$

ברור ש-  $f(r)$  מונוטונית עולה. מספיק להראות ש-  $f$  לא חסומה. עבור  $N$  כלשהו נבחר  $r = 1 - \frac{1}{N!}$  ואז

$$f(r) \geq \sum_{n=1}^N r^{n!} \geq \left(1 - \frac{1}{N!}\right)^{N!} \cdot N \geq \frac{N}{2e}$$

עבור  $N$  גדול מספיק.

**תרגיל.** למצוא  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} : \varphi$  העתקת מוביוס,  $\varphi(0) = a$ ,  $f(S^1) = S^1$ ,  $f(e^{i\theta}) = e^{i\mu}$ .

**פתרון.** נחפש את  $\psi - \varphi^{-1}$ .  $\psi_1(a) = 0$ ,  $\psi_2(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$  מעבירה את  $a$  ל-0 ומשיארה עיגול יחידה במקום.  $\psi_1(e^{i\mu}) \neq e^{i\theta}$  חכו נרכיב סיבוב  $\psi(z) = e^{i\lambda}\psi_1(z)$ .

$$e^{i\theta} = \psi(e^{i\mu}) = e^{i\lambda} \frac{e^{i\mu} - a}{1 - \bar{a}e^{i\mu}}$$

לכן,  $e^{i\lambda} = \frac{1-\bar{a}e^{i\mu}}{e^{i\mu}-a} e^{i\theta}$  ואז  $\psi(z) = e^{i\lambda} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ . נגדיר  $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  כעת  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$ .  
 $\varphi(S^1) = \varphi(S^1)$ ,  $\varphi(\infty) = [0]_{S^1} = [\varphi(0)]_{\varphi(S^1)} = \infty$ .  
העתקת מבוס עם שלוש נקודות שבת ולכן הזהות.

**תרגיל.**  $|R(z)| = 1 \Rightarrow |z| = 1$ . פונקציה רציונלית. למצוא את כל הפונקציה  $R$ .

**פתרון.**  $\tilde{R}(z)$  ממשית על הישר הממשי, דרך אחת לאפיין זה  $\tilde{R}(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  כאשר  $p(z), q(z) \in \mathbb{R}[z]$  זרים. דרך שנייה לאפיין זה שהאפסים של  $p$  והאפסים של  $q$  סימטריים ביחס לישר הממשי.

מדוע? יחידות הפירוק לגורמים אי פריקים.  
הרעיון השני הוא שהעתקות מוביוס מעבירות פונקציות רציונליות לפונקציות רציונליות באופן חח"ע ועל.  
כלומר,  $R \mapsto \varphi \circ R, R \mapsto R \circ \varphi$  שתיהן העתקות הפיכות של קבוצת הפונקציות הרציונליות עבור  $\varphi$  העתקת מוביוס.  
תשובה סופית  $\varphi \circ \tilde{R} \circ \varphi^{-1}$ . כאשר  $\tilde{R} = \frac{p}{q}$  מנה של פולינומים ממשיים  $f(z) = i \frac{z-i}{z+i}$ ,  $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ .