

פונקציות מרוכבות 1 – תרגול 13

6.5.11

הלמה של שוורץ

$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ הולומורפית עם $f(0) = 0$.

$$1. |f(z)| \leq |z|$$

$$2. |f'(0)| \leq 1$$

הערה. מעגלים קטנים אינפיניטימלית גם מתכווצים.

בנוסף אם יש שוויון לאיזה z ב- (1) או שוויון ב- (2) זה גורר $f(z) = \lambda z$ עבור $|\lambda| = 1$.
הכללה: הלמה של פיק. $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ הולומורפית, אז:

$$1. \left| \frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(z)}f(w)} \right| \leq \left| \frac{z-w}{1-\overline{z}w} \right|$$

$$2. |f'(z)| \leq \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$$

אם יש נקודת שוויון איפהשהו אז $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$, $|a| < 1$.

תרגיל. אם $f : \mathbb{D} \rightarrow G$ חח"ע ועל. צ"ל $|f'(0)| \leq \text{dist}(f(0), \partial G)$.

פתרון. נסמן $w_0 = f(0)$, $d_0 = \text{dist}(w_0, \partial G)$. אי אפשר להשתמש בלמה של שוורץ - היא נותנת מסקנה בכיוון הפוך ואנחנו לא יודעים ש- f מעבירה את הדיסק לדיסק. אבל, קיימת $g : D_w \rightarrow \mathbb{D}$ הפוכה ל- f , $f \circ g(w) = w$. הולומורפית כהפוכה של פונקציה הולומורפית. $\mathbb{D} \supset U = f^{-1}(D_w)$ אז $g : D_w \rightarrow U$, $f : U \rightarrow D_w$. נגדיר פונקציה חדשה $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ע"י $h(w) = g(\underbrace{w_0 + d_0 U}_{D_w})$, $h(0) = g(w_0) = 0$. כעת מהלמה של שוורץ

$$|h'(0)| \leq 1, \text{ לכן } |g'(w_0)| \leq \frac{1}{d_0} \text{ ו- } |g(w_0)| = \frac{1}{|f'(0)|} \text{ לכן } |f'(0)| \geq d_0.$$

תרגיל. $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית ורציפה עד השפה. בנוסף כאשר $|z| = 1$ גם $|f(z)| = 1$. צ"ל

$$1. f \neq 0 \Rightarrow f \text{ קבועה.}$$

$$2. f \text{ רציונלית.}$$

פתרון.

1. לפי עקרון המקסימום $|f| \leq 1$ בכל הדיסק. $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ הולומורפית בדיסק מהנתון, מקיימת $|g(z)| = 1$ כאשר $|z| = 1$. לכן $|g| \leq 1$ בכל הדיסק. מכאן $|f| = 1$ בכל הדיסק ולכן f קבועה (כמו בתרגול הקודם).

2. רעיון: לבטל את האפסים של f .

נסמן, $z_1, \dots, z_n$ אפסי f בדיסק (מספר סופי, לפי משפט היחידות) ואין נקודות הצטברות בשפה כי $|f| = 1$ בשפה. אפס מריבוי k יופיע k פעמים ברשימה. עבור $a \in \mathbb{D}$ נגדיר $f_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $f_a(a) = 0$, $f_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ הפיכה. ב- a יש אפס פשוט כי f הפיכה ולכן $f' \neq 0$. אין אפסים אחרים לכן נגדיר $f_1(z) := \frac{f(z)}{f_{z_1}(z)}$ ב- $\mathbb{D}$. בפועל $f_1 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ עבור $|z| = 1$, $|f_1(z)| = \frac{|f(z)|}{|f_{z_1}(z)|} = \frac{1}{1} = 1$.

לפי עקרון המקסימום $|f_1(z)| \leq 1$ לכל $z \in \mathbb{D}$. בפועל $|f_1(z)| < 1$ כאשר $z \in \mathbb{D}$ לפי משפט ההעתקה הפתוחה. לכן $f_1 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ואז מקיימת את תנאי השאלה ויש לה פחות אפסים אז נמשיך בתהליך ונקבל $f_a(z) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ הולומורפית, רציפה עד השפה, $|f_n(z)| = 1$ לכל $|z| = 1$ לא מתאפסת. לפי הסעיף הראשון f_n קבועה.

$$c = f_n(z) = \left[\prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z} \right]^{-1} \cdot f(z)$$

ולכן f רציונלית.

תרגיל. מצאו את $\text{Aut}(\mathbb{D} \setminus 0)$.

פתרון. ניקח $\varphi : \mathbb{D} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{D} \setminus 0$ הפיכה. נחקור סינגולריות ב-0 יש שם סינגולריות סליקה כי φ חסומה בסביבת 0, שכן $|\varphi| < 1$ שם. לכן ניתן להמשיך את φ לפונקציה הולומורפית $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$.

טענה. $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ זאת כי $\mathbb{D} = \{0\} \cup \{|z| = 1\} \cup \mathbb{D} = \mathbb{D}$ לפי משפט ההעתקה הפתוחה $\varphi(\mathbb{D}) \Rightarrow \varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$.

בנוסף $\varphi|_{\mathbb{D} \setminus 0}$ חח"ע.

טענה. $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ חח"ע.

הוכחה. אחרת, $\varphi(0) = \varphi(z_0) = w_0$, $z_0 \neq 0$, $|z_0| = r$, $r' > r$. $z_{D_r}(0)(\varphi, w_0) = \text{ind}(\varphi \circ \gamma_r, w_0)$ אינדקס של מסילה הוא קבוע ברכיבי קשירות של המשלים. עבור w_1 מספיק גדול קרובה ל- w_0

$$z_{D_r}(\varphi, w_1) = 1$$

כי φ חח"ע מחוץ ל-0 ו-1

$$\text{ind}(\varphi \circ \gamma_r, w_0) = Z_{D_r}(\varphi, w_1)$$

וזה סתירה. לכן חח"ע. $\square$

לכן $\varphi(0) = 0$ (כי שאר הנקודות ב- $\mathbb{D}$ תפוסות) כלומר $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ביהולומורפית. לכן

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \quad |a| < 1$$

ובנוסף $\varphi(0) = 0$ לכן $a = 0$ ולכן $\varphi(z) = e^{i\theta} z$. לכן $\text{Aut}(\mathbb{D} \setminus 0)$ זה סיבובים.

אינדקס של מסילה

איך מחשבים? לוקחים נקודה z_0 ברכיב קשירות של המשלים, מעבירים קרן לאינסוף (שלא עוברת בנקודה בה המסילה עוברת פעמיים ולא משיקה למסילה) ואז לכל נקודת חיתוך עם המסילה מסמנים $+1$ אם היא נגד כיוון. השעון ו- -1 אם היא עם כיוון השעון. בסוף סוכמים את ה- ± 1 .

למה זה טוב? משפט שאריות נוסח ככלי:

Ω תחום פשוט קשר, $\gamma \subset \Omega$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית ב- $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$, $z_j \notin \gamma$. אז

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \left(\sum \text{res}(f, z_j) \cdot \text{ind}(\gamma, z_j) \right)$$