

פונקציות מרוכבות 1 – תרגול 12

30.5.11

משפט ההעתקה הפתוחה: $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית, G תחום, אז f העתקה פתוחה.

משפט. ל- f פתוחה אם $U \subseteq G$ פתוחה אז $f(U)$ פתוחה.

משפט ההעתקה המקומית: $f, w_0 = f(z_0), z_0 \in G$ הולומורפית לא קבועה.

• אם $f'(z_0) \neq 0$ אז יש סביבה U וסביבה V כך ש- $f(U) = V$, $f : U \rightarrow V$ חח"ע ועל וכן $f^{-1} : V \rightarrow U$ הולומורפית.

• אם $f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, f^{(n)}(z_0) \neq 0$ (באופן לא פורמלי f מקבל w_0 פעמים n ב- z_0) שוב יש U, V כך ש- $f(U) = V, w_0 \in V, z_0 \in U$ $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow V \setminus \{w_0\}$ היא n -ל-1, כלומר לכל $w \in V \setminus \{w_0\}$ $\#f^{-1}(w) = n$.

הערה. בכיתה ספרנו רק כולל ריבויים, אבל אם $f'(z_0) = 0$ אז יש סביבה מנוקבת של z_0 בה $f' \neq 0$ (כי f' הולומורפית לא יתכן שתתאפס על סביבה) לכן לספור עם ריבוי זה מיותר).

תרגיל. $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ חח"ע, על והולומורפית. צ"ל כי $f = az$ או $f = \frac{a}{z}$.

הוכחה. נחקור את הסינגולריות באפס. $R = \{1 \leq |z| \leq 2\}$, $f^{-1}(R)$ קבוצה קומפקטית כי f העתקה פתוחה ורציפה.

לכן, $f^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ פונקציה רציפה (אפילו הולומורפית אבל זה לא חשוב). לכן $K = f^{-1}(R)$ קומפקטית, $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ לכן קיימת U סביבה פתוחה של 0 כך ש- $U \cap K = \emptyset$. אפשר להניח ש- U היא דיסק. לכן לכל $z \in U \setminus \{0\}$

$$f(z) \notin R \Leftrightarrow z \notin \underbrace{f^{-1}(R)}_{=K}$$

$f(U \setminus \{0\}) \cap R = \emptyset$, $U \setminus \{0\}$ קשירה לכן $f(U \setminus \{0\})$ קשירה. לכן אחת האפשרויות הבאות תקפה:

$$(1) \quad f(U \setminus \{0\}) \subseteq \{|z| \leq 1\}$$

$$(2) \quad f(U \setminus \{0\}) \subseteq \{|z| \geq 2\}$$

לכן לפי משפט קסורטי-וירשטראס $z = 0$ אינה סינגולריות עיקרית עבור f כי $f(U)$ אמורה להיות צפופה (באפשרות הראשונה בכלל מדובר בסינגולריות סליק כי f חסומה). לכן $z^m f$ פונקציה שלמה עבור $m \in \mathbb{N}$. אותו שיקול עם ∞ במקום אפס מראה שבאינסוף גם יש קוטב לכל היותר.

לכן $z^m f$ שלמה עם קוטב לכל היותר באינסוף לכן $f = \frac{p(z)}{z^m}$ עבור p פולינום (נניח גם ש- p זר ל- z^m כי אחרת פשוט נצמצם).

פונקציות רציונליות על הספרה מקבל כל ערך γ הדרגה שלה γ פעמים. (בעקרון זה כולל ריבוי אבל כל הנקודות בספרה מתקבלות $\deg f$ פעמים וכדאי לחשוב למה).
 f חח"ע (לפחות ב- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$) לכן $m \leq 1$ וגם $\deg p \leq 1$:

1. $m = 0$, p לינארי ולכן $f = az + b$, $f(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ולכן $b = 0$.

2. $m = 1$, p לינארי ולכן $f = \frac{az+b}{z} = a + \frac{b}{z}$ ואז $f(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ולכן $f(z) = \frac{b}{z}$.

□

אפסים

עקרון הארגומנט: $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית, $\partial G = \gamma$ מסילה סגורה, פשוטה, לכל $z \in G$, $f(z) \neq 0$ אז:

$$Z_f(G) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma(\arg(f)) = \frac{1}{2\pi i} \Delta_\gamma(\log(f)) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{ind}(f \circ \gamma; 0)$$

כאשר $Z_f(G)$ הוא מספר האפסים של f ב- G כולל הריבוי. הערות.

1. בביטויים בהם אין f' מספיק להניח f רציפה עד השפה. אחרת צריך המשך הולומורפי לסביבה.

2. אם f מרומורפית ב- G זה $Z_f(G) - P_f(G)$ במקום $Z_f(G)$, כאשר $P_f(G)$ הוא מספר הקטבים, כולל הריבוי, של f ב- G .

תרגיל. f שלמה, $\gamma = \partial G$ פשוטה ולכל $z \in \gamma$, $\text{Im}(f(z)) \neq 0$, צ"ל $f \neq 0$ ב- G (כלומר לא מתאפסת ב- G).

הוכחה. נשתמש בעקרון הארגומנט. f לא מתאפסת על השפה לכן

$$Z_f(G) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} dz = \text{ind}(f \circ \gamma, 0)$$

$f \circ \gamma$ מסילה שאינה חותכת את הציר הממשי (נתון). הקבוצה היא קשירה לכ $f \circ \gamma \subseteq \{ \text{Im } z > 0 \} = \mathbb{C}_+$ או $\{ \text{Im } z < 0 \} = \mathbb{C}_-$.
 $\{ \text{Im } z > 0 \}$ תחום קמור, בפרט פשוט קשר ולכן כל מסילה בו כוויצה (הולומורפית לנקודה).
 $0 \notin \{ \text{Im } z > 0 \}$ ולכן האינדקס של כל מסילה סביב 0 מהתחום הוא 0. כנל עבור $\{ \text{Im } z < 0 \}$. לכן $\text{ind}(f \circ \gamma, 0) = 0$ ולכן $Z_f(G) = 0$.
□

הערה. באופן לא פורמלי $\text{ind}(f \circ \gamma, 0) = 0$ נובע מכך ש- $\mathbb{C}_\pm$ לא מלפפים את 0.

הערה. השתמשנו בטענה הבאה: $\text{ind}(\gamma, p)$ לא משתנה תחת הומוטופיה של γ שאינה עוברת דרך p .

תרגיל. חשבו את $\text{ind}(\gamma, 0)$ עבור $\gamma(t) = 4e^{it} + e^{-it} - 4$.

פתרון. זו אליפסה, רואים שהאינדקס הוא 1. פורמלית יש שתי אפשרויות:

1. לעשות הומוטופיה למסילה אחרת סביב 0, למשל מעגל (כיווץ רדיאלי) ואינדקס של מעגל אנחנו יודעים.

2. נגדיר $f(z) = 4z + \frac{1}{z} - 4$. f מרומורפית ב- $\mathbb{D}$. לפי עקרון הארגומנט ב- D :

$$Z_f(\mathbb{D}) - P_f(\mathbb{D}) = \text{ind}(\underbrace{f \circ S^1}_{=\gamma}, 0) = \text{ind}(\gamma, 0)$$

אבל, $P_f(\mathbb{D}) = 1$ כי $z = 0$ קוטב פשוט. לכן:

$$4z + \frac{1}{z} - 4 = 0 \Leftrightarrow 4z^2 - 4z + 1 = 0 \Leftrightarrow (2z - 1)^2 = 0$$

$$\text{ind}(\gamma, 0) = 2 - 1 = 1 \text{ סה"כ } z = \frac{1}{2}$$

משפט. רושה

G תחום גולרי חסום, $f, g \in \text{Hol}(G) \cap C(\overline{G})$ ולכל $z \in \partial G$

$$(*) \quad |f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

$$Z_f(G) = Z_g(G) \text{ אזי,}$$

הערה. תחת התנאי $(*)$ ברור כי f, g אינן מתאפסות ב- ∂G .

תרגיל. $p(z) = z^4 - 5z + 1$. כמו שורשים כולל ריבוי יש ל- p ב:

$$1. \quad |z| < 1.$$

$$2. \quad 1 < |z| < 2.$$

פתרון.

1. נראה $|p(z) - (-5z)| < |-5z|$ בשפה. ואמנם:

$$|z^4 + 1| \leq 1 + 1 = 2 < 5 = |-5z|$$

$$z \in S^1 \text{ עבור}$$

לכן, לפי משפט רושה $Z_p(\mathbb{D}) = Z_{-5z}(\mathbb{D}) = 1$ ואין אפסים על S^1 .

2. נעבור בתחום $\{|z| < 2\}$. על השפה $|z| = 2$:

$$|p(z) - z^4| \leq |-5z + 1| \leq 5 - 2 + 1 = 11 < 16 = 2^4 + |z^4|$$

$$\text{לכן, } Z_{|z|<2}(p) = 4 \text{ ולכן } Z_{1<|z|<2}(p) = 4 - 1 = 3.$$

תרגיל. יהי $p_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$. הוכיחו כי ל- p_n אין אפסים מחוץ ל- $\{\frac{n}{2e} < |z| \leq n\}$.

הוכחה. נראה שב $z > \frac{n}{2e}$ אין אפסים. הצד השני - תרגיל בית. נשווה ל- $|z| = \frac{n}{2e}$.
נראה $|p_n(z) - e^z| \leq |e^z|$ ואכן:

$$\begin{aligned} |p_n(z) - e^z| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{n}{2e} \right)^k \cdot \frac{1}{k!} \stackrel{(*)}{\leq} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n^k}{(2e)^k} \cdot \left(\frac{e}{k} \right)^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{n}{2k} \right)^k < \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

אבל $|e^z| \geq e^{\frac{n}{2e}}$ ונותר רק להראות ש- $e^{-\frac{1}{2e}} > \frac{1}{2}$.

(*) כי $k! > \left(\frac{k}{e}\right)^k$. אפשר להוכיח למשל באינדוקציה. $\square$

תרגיל. $H_n(z) = e^{z^2} \cdot \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z^2})$ (באינדוקציה אפשר להראות שמדובר בפולינום מדרגה n). הוכיחו כי כל שורשי H_n ממשיים.

פתרון. סקיצת ההוכחה: נמצא סדר $H_n \xrightarrow{u} f_k$ עם אפסים ממשיים ל- f_k לכל k . אם ל- H_n יש אפס $z_0 \notin \mathbb{R}$, לכן על השפה $|f_k - H_n| < \min_{\partial D(z_0)} |H_n|$ עבור k גדול מספיק. לכן $0 = Z_{f_k}(D_0) = Z_{H_n}(D_0) \geq 1$.
נותר למצוא רק f_k כנ"ל שמתכנסות במ"ש ל- H_n . האפסים של H_n ושל $\frac{d^n}{dz^n} (e^{-z})$ מתלכדים כולל ריבוי (כי $e^{z^2} \neq 0$ לכל z) ולכן

$$\left(1 - \frac{z^2}{k}\right)^k \Rightarrow e^{-z^2}$$

במ"ש מקומית. לכן ממשפט ויירשטראס, לפונקציה הולומורפית זה גורר התכנסות הנגזרות:

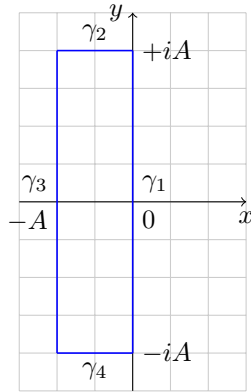
$$\frac{d^n}{dz^n} \left(1 - \frac{z^2}{k}\right)^k \Rightarrow \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z^2/k})$$

למה כל אפסי f_k ממשיים? $z = -\sqrt{k}$ אפס מריבוי k , $z = \sqrt{k}$ אפס מריבוי k . הוכחנו שעבור פולינום p האפסים של p' נמצאים בקמור של האפסים של p , וקמור של נקודות ממשיות מורכב מנקודות ממשיות. וכך לכל נגזרת.

הערה. אפשר להראות זאת גם ממשפט רול מחדו"א 1 ומראים שלפולינום שכל אפסיו ממשים גם לנגזרות שלו זה כך.

תרגיל. צ"ל שלמשוואה $e^z = z + \lambda$, $\text{Re } \lambda > 1$ יש שורש יחיד ב- $\{\text{Re } z < 0\}$.

פתרון. נגדיר $f(z) = z + \lambda e^z$. R נתבונן במלבן:



מחוץ למלבן, כלומר $|z| \geq A$: $|\lambda - e^z| \leq |\lambda| + 1$ ולכן $|z + \lambda - e^z| > |z| - |\lambda - e^z| > A - (|\lambda| + 1) > 0$
 נשאר להראות שלמשוואה $f(z) = 0$ יש פתרון יחיד בתוך המלבן (הראינו שמחוץ למלבן אין פתרון).
 נראה: $|f(z) - (z - \lambda)| < |z + 2|$ ל- $z \in \partial R$ ואז מרושה $Z_f(R) = Z_{\lambda+z}(R) = 1$
 האם $|e^z| < |z + \lambda|$ (*)?
 עבור $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, $|z| \geq |A| > |\lambda| + 1$, לכן מאי"ש (*) מתקיימת ב- γ_1 $z \in iR$.
 גורר $|e^z| = 1$.

$$|z + \lambda| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + \underbrace{\quad}_{\text{ממשי כלשהו}}} \geq \operatorname{Re} \lambda > 1 + |e^z|$$

תרגיל. f הולומורפית בסביבה מנוקבת שד 0 וכן $f \notin \mathbb{R}$ (לא מקבלת ערכים ממשיים). צ"ל $z = 0$ נקודת סינגולריות סליקה.

הוכחה. נסמן ב- U^* את הסביבה המנוקבת. נוכל לבחור אותה קשירה ואז גם $f(U^*)$ קשירה, $f(U_0^*) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ ולכן $f(U^*) \subseteq \mathbb{C}_+$ או $f(U^*) \subseteq \mathbb{C}_-$.
 כמו קודם, זאת לא יכולה להיות סינגולריות עיקרית לכן f בעלת קוטב לכל היותר. מכאן, $f(z) = z^{-n}g(z)$, n הוא סדר הקוטב, g הולומורפית ב- U (כולל 0), $g(0) \neq 0$. עבור $\varepsilon > 0$ נציב $z = \varepsilon e^{it}$, אז

$$f(\varepsilon e^{it}) = \frac{g(\varepsilon e^{it})}{\varepsilon^n e^{itn}} = \frac{g(0) + O(\varepsilon)}{\varepsilon^n e^{itn}}$$

ולכן

$$f(\varepsilon e^{it}) = \frac{g(0)}{\varepsilon^n} \cdot e^{-it} + O\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\right)$$

$\frac{g(0)}{\varepsilon^n} e^{-itn}$ מדומה. $f(\varepsilon e^{it})$ נמצא ב- $\mathbb{C}_+$ או $\mathbb{C}_-$ לכל t . נבחר t כך ש- $\frac{g(0)}{\varepsilon^n} e^{-itn}$ אז השגיאה (עבור ε קטן מספיק) לא תחליף את את $\mathbb{C}_+$ ב- $\mathbb{C}_-$, אבל ההחלפה $t \mapsto t + n$ דווקא כן תחליף $\mathbb{C}_+$ ב- $\mathbb{C}_-$ וזו סתירה. לכן הסינגולריות לא קוטב ולא עיקרית ולכן סליקה. $\square$