

פונקציות מרוכבות 1 – תרגול 11

23.5.11

שארית אינטגרלים

הגדרה. f הולומורפית בסביבת $p \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{res}(f, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-p|=\varepsilon} f(z) dz$$

באופן שקול

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^n$$

ואז $\operatorname{res}(f, p) = a_{-1}$.

באופן לא פורמלי, השארית היא מה שמניע את f להיות בעלת קדומה סביב הנודה.

הגדרה. שארית באינסוף (עם הפונקציה הולומורפית בסביבה של אינסוף)

$$\operatorname{res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z) dz$$

כאשר R גדול מספיק. כאן $|z|=R$ באוריינטציה הפוכה כי אינסוף צריך להיות בתחום.

הגדרה. נקודה סינגולרית היא מ-3 סוגים.

1. סילקה (קיים המשך הולומורפי פנימה). משפט רימן: f חסומה סביב $p \Leftrightarrow p$ סינגולרית סליקה.

2. קוטב: טור לורן סופי משמאל $\Leftrightarrow |f(z)| \xrightarrow{z \rightarrow p} +\infty$.

3. סינגולריות עיקרית – טור לורן אינסופי משמאל $\Leftrightarrow$ התמונה של f בכל סביבה של p צפופה ב- $\mathbb{C}$.

תרגיל. מיינו סינגולריות וחשבו שארית עבור:

$$f(z) = z \sin^2 \frac{1}{z}$$

$$g(z) = \frac{\sin z}{(z-1)^2}$$

פתרון. עבור $f: z = 0$ סינגולריות יחידה. לא קוטב כי f חסומה כאשר $z \in \mathbb{R}$ (ולכן $|f| \xrightarrow{z \rightarrow 0} \infty$). לא סינגולריות סליקה כי f לא חסומה $z = iy$:

$$f(iy) = iy \cdot \left(\frac{e^{1/y} e^{-1/y}}{2i} \right)^2$$

לכן זו סינגולריות עיקרית. חישוב שארית: יש שתי דרכים גנריות: לפתח לטור לורן או אם ל- f יש קוטב מסדר m בדיוק ב- $z = p$:

$$f(z) = \frac{a_m}{(z-p)^m} + \dots$$

$$f(z)(z-p)^m = a_m + \dots$$

$$\lim_{z \rightarrow p} \left[(z-p)^m f(z) \right]^{(m-1)} = a_{-1}$$

נפתח לטור לורן:

$$\begin{aligned} z \sin^2 \frac{1}{z} &= z \frac{1 - \cos \frac{2}{z}}{2} = \frac{z}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{4}{2z^2} + \frac{16}{24z^4} - \dots \right) \right) = \\ &= \frac{z}{2} \frac{2}{z^2} + \dots = \frac{1}{z} + \dots \end{aligned}$$

$\text{res}(f, 0) = 1$. ל- g יש סינגולריות יחידה ב- $z = 1$ והיא קוטב מסדר 2. ואכן $\sin 1 \neq 0$, $\sin z$ הולומורפית. אפשר להשתמש בשיטה השנייה.

$$\sin z = \frac{\sin 1 + \cos 1(z-1) + \dots}{(z-1)^2} = \frac{\sin 1}{(z-1)^2} + \frac{\cos 1}{z-1} + \dots$$

לכן $\text{res}(f, 1) = \cos 1$.

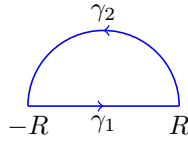
משפט. משפט השאריות של קושי
 G תחום רגולרי חסום, $\{a_j\}_{j=1}^N \subseteq G$ נקודות סינגולריות מבודדות, $f \in \text{Hol}(G \setminus \{a_j\}) \cap C(\overline{G} \setminus \{a_j\})$ אז

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{res}(f, a_j)$$

a_j קטבים או סינגולריות עיקריות.

תרגיל. חשבו את $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4-1}{x^6-1} dx$.

פתרון. $f(z) = \frac{z^4-1}{z^6-1}$. ניקח $\gamma_1 = [-R, R]$, γ_2 - חצי מעגל עליון מ- R ל- $-R$. נחשב את $\int_{\gamma} f(z) dz$.



נחקור נקודות סינגולריות של f : המכנה מתאפס ב- $-1, e^{-\pi i/3}, e^{-2\pi i/3}, 1, e^{\pi i/3}, e^{2\pi i/3}$. כל האפסים של המכנה פשוטים. המונה מתאפס ב- $\pm 1, \pm i$ שוב אפסים פשוטים. לכן ל- f יש שני קטבים פשוטים: $e^{\pm \pi i/3}$. נסמן: $\omega = e^{\pi i/3}, \omega^2 = e^{2\pi i/3}$. אלה הקטבים היחידים של f בתחום החסום. הם קטבים מסדר 1.

$$\begin{aligned} \text{res}(f, \omega) &= \lim_{z \rightarrow \omega} (z - \omega) f(z) = \lim_{z \rightarrow \omega} \frac{(z^4 - 1)(z - \omega)}{z^6 - 1} = \\ &= \lim_{z \rightarrow \omega} \frac{z^4 - 1 + 4z^3(z - \omega)}{6z^5} = \frac{\omega^4 - 1}{6\omega^5} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{\omega} - \omega \right) = \frac{1}{6} (e^{-\pi i/3} - e^{\pi i/3}) \end{aligned}$$

אפשר לעשות לופיטל כי הפונקציה אנליטית ולכן יש טור טיילור. באופן דומה, $\text{res}(f, \omega^2) = \frac{1}{6} (e^{-2\pi i/3} - e^{2\pi i/3})$, לכן,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \frac{2\pi i}{6} \left(-2i \sin \frac{\pi}{3} - 2i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{2\pi i^2 \sqrt{3}}{3} \cdot 2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \leq \max_{|z|=R} |f(z)| \pi R \sim \frac{\pi}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

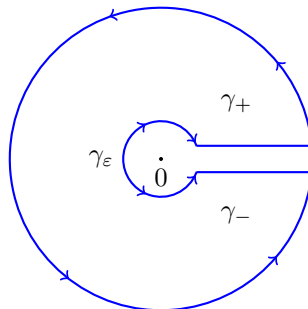
לכן

$$\int_{-R}^R \frac{x^4 - 1}{x^6 - 1} dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{2\pi i}{\sqrt{3}}$$

תרגיל. חשבו את $\int_0^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x}(x+1)} dx$.

פתרון.

$$f(z) = \frac{\log z}{\sqrt{z}(z+1)}$$



בחירת ענפים:

$$\log z : 0 < \arg z < 2\pi$$

$$\sqrt{z} : \sqrt{-1} = i$$

נקודות סינגולריות של f :
קוטב יחיד ב- $z = -1$, מסדר 1,

$$\operatorname{res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1)f(z) = \frac{\log(-1)}{\sqrt{-1}} = \frac{i \arg(-1)}{i} = \pi$$

לכן,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \pi = 2\pi^2 i$$

נחשב בדרך שנייה:

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq 2\pi R \frac{\log R + O(1)}{\sqrt{R}(R-1)} \rightarrow 0$$

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} \right| \leq 2\pi \varepsilon \frac{\log \varepsilon + O(1)}{\sqrt{\varepsilon}} (1 + O(\varepsilon)) \sim c\sqrt{\varepsilon} \log \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\int_{\gamma_+} f(z) dz \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^R \frac{\log x}{\sqrt{x}(x+1)} dx \rightarrow \int_0^\infty$$

$$\int_{\gamma_-} f(z) dz \rightarrow - \int_{\varepsilon}^R \frac{\log x + i2\pi}{(x+1) \cdot (-\sqrt{x})}$$

סה"כ

$$2 \int_0^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x}(x+1)} dx + 2\pi i \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = 2\pi^2 i$$

על הדרך הראינו שהאינטגרלים סופיים כי חישבנו את הגבול כאשר $R \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ לכן

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x}(x+1)} dx = 0$$