

פונקציות מרוכבות 1 – תרגול 10

16.5.11

עקרון המקסימום, משפט היחידות, טורי לורן

עקרון המקסימום

משפט. G תחום חסום. $f \in \text{Hol}(G) \cap C(\overline{G})$. אז:

$$1. \max_{z \in \overline{G}} |f| = \max_{z \in \partial G} |f|$$

2. אם יש שוויון בנקודה פנימית $|f(z_0)| = \max_{\partial G} |f|$, אז f קבועה.

תרגיל. נתון פולינום מתוקן $P = 1 \cdot z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$. הוכיחו כי $\max_{|z|=1} |P(z)| \leq 1 \Leftrightarrow P(z) = z^n$.

הוכחה. $Q(z) = z^n P(\frac{1}{z}) = a_0 z^n + \dots + a_{n-1}z + 1$ ואז $Q(0) = 1$. כמו כן,

$$\max_{|z|=1} |P(z)| = \max_{|z|=1} |Q(z)|$$

זה כי $|z| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = 1$ בנוסף על S^1 , $|z^n| = 1$, לכן,

$$1 = |Q(0)| \leq \max_{|z|=1} |Q(z)|$$

מעקרון המקסימום.
אבל,

$$\max_{|z|=1} |Q(z)| = \max_{|z|=1} |P(z)|$$

ושוויון מתקיים אם ורק אם Q קבועה, כלומר $Q \equiv 1$ ואז $P(z) = Q(1/z)z^n = z^n$. $\square$

תרגיל. $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית, רציפה עד השפה. בנוסף, נתון

$$|z| = 1, \quad \text{Im } z > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |f(z)| \leq 2$$

$$|z| = 1, \quad \text{Im } z < 0 \quad \Leftrightarrow \quad |f(z)| \leq 3$$

הוכיחו:

$$1. |f(0)| \leq 5/2.$$

$$2. |f(0)| \leq \sqrt{6}.$$

הוכחה.

5/2 זה הממוצע החשבוני של 2, 3. ממשפט הערך הממוצע:

$$f(0) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$\Rightarrow |f(0)| \leq \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi |f| d\theta + \int_\pi^{2\pi} |f| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} (3\pi + 2\pi) = \frac{5}{2} \right)$$

$\sqrt{6}$ זה הממוצע ההנדסי של 2, 3. נגדיר $g(z) = f(z)f(-z)$ (אפשר גם $g(z) = f(z)f(\bar{z})$). ואז g הולומורפית בדיסק, רציפה עד השפה $|g(z)| \leq 2 \cdot 3 = 6$. לכן, $|g(0)| \leq 6$ עפ"י עקרון המקסימום. לכן $|f(0)| = \sqrt{|g(0)|} \leq \sqrt{6}$. $\square$

משפט היחידות (משפט ההמשכה האנליטית)

משפט. G תחום, $f \in \text{Hol}(G)$, $A \subseteq G$ עם נקודות הצטברות בתוך G ($A \ni a \rightarrow a_\infty \in G$). בנוסף, $f(a_n) = 0$ או $f \equiv 0$ ב- G .

הערה. אין דרישה $a_\infty \in A$ כי $f(a_n) = 0$ ולכן $f(a_\infty) = \lim f(a_n) = 0$ כי f רציפה.

מסקנה. אם $f, g \in \text{Hol}(G)$ מזהות על A אז $f \equiv g$.

תרגיל. הוכיחו כי $\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z$.

הוכחה. נגדיר $f = \cos(2z)$, $g = \cos^2 z - \sin^2 z$. פונקציות שלמות ($G = \mathbb{C}$). ולכל $z \in \mathbb{R}$, $f(z) = g(z)$.

$\mathbb{R}$ קבוצה עם נקודות הצטברות ב- $\mathbb{C}$. ולכן לפי משפט היחידות $f \equiv g$. $\square$

נספח למשפט היחידות: $f \in \text{Hol}(G)$, $z_0 \in G$, $f^{(n)}(z_0) = 0$, $\forall n \geq 1$. אז $f \equiv \text{const}$ ב- G .

תרגיל. האם קיימת f אנליטית ב- $\mathbb{D}$ כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n}$?

פתרון. $A = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ קבוצה עם נקודות הצטברות ב- $\mathbb{D}$ לכן אם f קיימת, הפונק' f יחידה.

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} = \underbrace{\left(\frac{1}{2n}\right)}_{\text{פונק' זהות}}$$

$\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ קבוצה עם נקודות הצטברות ולכן $f(z) = z$. באותו אופן $f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = -\frac{1}{2n+1}$. $(-z)\left(\frac{1}{2n+1}\right)$ לכן $f(z) \equiv -z$ ולכן $z \equiv -z$ וזו סתירה.

תרגיל. האם קיימת $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית לא קבועה כך ש- $f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$?

פתרון. אין. נראה זאת. $\varphi(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$, $\varphi(z) = \frac{1}{\frac{1}{z}+1} = \frac{z}{z+1} : \frac{1}{n} \rightarrow \frac{1}{n+1}$.
 $\mathbb{D}$. נרצה להסתכל על $g(z) = f \circ \varphi(z) - f(z)$ ואז $g(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n}) - f(\frac{1}{2n+1})$.
 $f(\frac{1}{2n}) = 0$.

נוודא ש- g מוגדרת היטב בסביבה של הקטע $[0, \frac{1}{2}]$ כלומר ש- φ מעבירה סביבה U מספיק קטנה של $[0, \frac{1}{2}]$ ל- $\mathbb{D}$ (ואז אפשר להסתכל על $f \circ \varphi(z)$) וזו פונקציה הולומורפית בסביבה הזו).

$f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) \subseteq \mathbb{R}$, $\varphi([0, 1/2]) = [0, 1/3]$
 $[0, 1/2]$ נסיק שקיימת U כנדרש.

לכן $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה הולומורפית שמקיימת $g(\frac{1}{2n}) = 0$, $\frac{1}{2n} \rightarrow 0 \in U$.

ולכן $g \equiv 0$ כלומר $f \circ \varphi(z) = f(z)$ $\forall z \in U$ ולכן

$$f(1/2) = f(1/3) = f(1/4) = \dots = f(1/n) = \dots = f(0)$$

ממשפט היחידות $f(z) \equiv f(0)$.

תרגיל. הוכיחו: לפונקציה שלמה $f \neq 0$ יש לכל היותר מספר בן מניה של אפסים.

הוכחה. ראינו שכל אפס מבודד, כלומר אם $f(z_0) = 0$ אז קיים דיסק D_{z_0} סביב z_0 שבו z_0 הוא האפס היחיד. כל דיסק כזה מכיל נקודה רציונלית. נבחר את הדיסקים שלא ייחתכו (בוחרים את הדיסקים איכשהו ואז כל אחד מהדיסקים לא חותך מרכזי דיסקים אחרים, בדיוק האפסים של f , ואז נקטין את הדיסקים פי 2). לכן כל דיסק מכיל נקודה רציונלית שלא מוכלת בדיסקים האחרים לכל היותר מספר בן מניה. $\square$

טורי לורן

A טבעת מוכללת $A = \{r < |z - z_0| < R\}$, $0 \leq r < R \leq \infty$.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

רדיוס ההתכנסות הוא

$$R^{-1} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \quad r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$$

יש הצגה כזו לכל פונקציה הולומורפית f ב- A . ההצגה יחידה.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

עבור ρ המקיים $r < \rho < R$.

תרגיל. חשבו טור לורן עבור

$$f(z) = \frac{z-3}{(z-1)(z-2)}$$

סביב $z_0 = 0$.

פתרון. ל- f יש נקודות סינגולריות ב- $z = 1, 2$. לכן יש 3 טבעות הולומורפיות:
 A_1 - דיסק ולא טבעת. טור לורן הוא למעשה טור טיילור ב- A_1 .

$$f(z) = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z-2} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$$

ב- A_1 : $|z| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1$
 ב- A_2 : $\left|\frac{z}{2}\right| < 1, |z| > 1$

$$f(z) = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z-2} = \frac{2}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2(1-\frac{z}{2})} = \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

A_3 תרגיל בית.