

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 9

27.03.11

בשיעור הקודם דיברנו על הלוגריתם.

$$z \neq 0 \quad \log(z) = \ln|z| + i \arg(z)$$

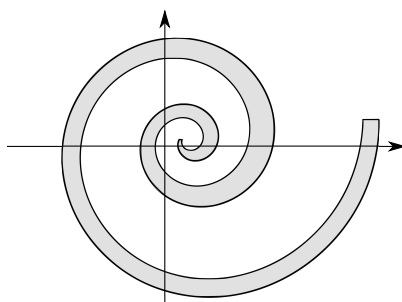
כאשר $\ln$ הוא הלוגריתם הממשי. אבל יש כאן בעיה ש $\arg(z)$ מוגדר עד כדי תוספת $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. זה לא באמת נוכח לעבוד עם פונקציות רב ערכיות אז הגדרנו:

תזכורת. ענף של $\log$ בתחום $G \subseteq \mathbb{C}$ היא פונקציה רציפה $u : G \rightarrow \mathbb{C}$ כך ש- $e^{u(z)} = z$. יש ענף של $\log$ ב- G אם יש ענף של $\arg$.

דוגמא. בתחום $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ הגדרנו את Log – הענף הראשי. את הקרן בה הלוגריתם לא מוגדר אפשר לסובב בכל דרך שהיא, בפרט אפשר להגדיר ענף של לוגריתם בחצי מישור שהראשית בשפתו.

דוגמא. אין ענף של $\log$ לדוגמא בכל המישור או בטבעת: השטח החסום ע"י שני מעגלים עם מרכז משותף (בתחומים האלה אי אפשר להגדיר את הארגומנט באופן רציף).

דוגמא.



כאן אין בעיה שהוא כל הזמן יעלה. אם נחבר שני חלקים של הספירלה אז כבר אי אפשר להגדיר.

ראינו:

1. אם l_1, l_2 ענפים של $\log$ בתחום G $l_1 - l_2 = \text{const}$.

2. ענף l של $\log$ הוא תמיד פונקציה הולומורפית עם $l'(z) = \frac{1}{z}$, $\forall z \in G$.

הרבה פעמים נרצה לעשות לוגריתם של פונקציה:

תזכורת. תהי $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה הולומורפית. "ענף של $\log(f)$ היא פונקציה רציפה $e^{u(z)} = f(z) \forall z \in G$ כך ש- $u : G \rightarrow \mathbb{C}$

הערות.

1. יש תחומים G שאין בהם ענף של $\log z$ אבל יש בהם ענף של $\log f$ עבור f מסויים (וגם להפך). למשל ל- $f(z) = e^z$ יש ענף ל- $\log f$ ב- $\mathbb{C}$ (פשוט הפונקציה z).

2. אם u_1, u_2 שני ענפים של $\log f$ אז $u_1 - u_2 = \text{const}$.

3. נניח $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית, $z_0 \in G$ ונניח $f(z_0) \neq 0$ אז יש $\delta > 0$ כך שבדיסק $D(z_0, \delta)$ יש ענף של $\log f$.

הוכחה. f הולומורפית לכן רציפה. היינו רוצים למצוא סביבה קטנה של z_0 כך שהתמונה שלה תהיה מוכלת בחצי מישור כלשהו. למה זה יעזור? כי לקבוצה שמוכלת בחצי מישור אנחנו יודעים להגדיר $\log$.

מכיוון ש- $f(z_0) \neq 0$ קיים $\varepsilon > 0$ כך שהדיסק $D(f(z_0), \varepsilon)$ מוכל בחצי מישור פתוח שהראשית בשפתו (למשל אפשר לבחור $\varepsilon = |f(z_0)|$).

נסמן ב- H את חצי המישור הנ"ל. מרציפות קיימת δ כך ש-

$$\forall z \in G \quad |z - z_0| < \delta \Rightarrow f(z) \in D(f(z_0), \varepsilon) \subseteq H$$

אז מצאנו דיסק $D(z_0, \delta)$ כך ש- $f(D(z_0, \delta)) \subseteq H$. כעת סיימנו. מדוע? בחצי מישור אנחנו יודעים שיש ענף של $\log$: ניקח ענף של $\log$ בחצי המישור H ונביט ב-

$$z \in D(z_0, \delta) \quad u(z) = l(f(z))$$

u הולומורפית כי הרכבה, $e^{u(z)} = e^{l(f(z))} = f(z)$. לכן u ענף של $\log(f)$. בנוסף, אם אנחנו כבר כאן,

$$u'(z) = \frac{d}{dz} l(f(z)) = \frac{1}{f(z)} f'(z)$$

□

מסקנה. נניח u ענף של $\log(f)$ ב- G . אזי u הולומורפית ו-

$$\forall z \in G \quad u'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

זה מעודד כי אם יש ענף אז הנגזרת לא תלויה בו. זה נקרא נגזרת לוגריתמית.

הסבר. ניקח $z_0 \in G$, יש סביבה קטנה $D(z_0, \delta)$ שבה יש ענף v של $\log f$ ו- v הולומורפית עם

$$v'(z_0) = \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}$$

מצד שני אם גם u וגם v ענפים של $\log f$ בדיסק הקטן אז $u - v = \text{const}$ בדיסק הקטן ולכן u הולומורפית ב- z_0 עם $u'(z_0) = \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}$.

ברור ש- $f(z_0) \neq 0$ כי אחרת אין ענף של $\log f$.

אם כבר יש לנו לוגריתם, נוכל להגדיר חזקות של מספרים מרוכבים:

הגדרה. נניח $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית ושיש ענף של $\log f$ ב- G שיסומן ב- u . יהי $\alpha \in \mathbb{C}$ מסמנים:

$$f^\alpha = (e^{u(z)})^\alpha = e^{\alpha u(z)} = e^{\alpha \log(f)}$$

חשוב לשים לב שההגדרה של f^α עבור $\alpha \in \mathbb{C}$ תלויה בבחירת הענף של $\log(f)$. כמובן שאם α שלם הכל בסדר. אבל אפילו α ממשי: כבר $f = \sqrt{z}$ לא מוגדר באופן חד ערכי:

$$z = e^{i\theta} \quad \sqrt{z} = \{e^{i\theta/2}, -e^{i\theta/2}\}$$

בכלל a^b כאשר $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$ הוא לא חד ערכי.

טורי חזקות

הרעיון: ניקח סדרת מספרים מרוכבים $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ ונביט בטור חזקות

$$\sum_{n=0}^\infty c_n z^n$$

מסתבר שאם זה מתכנס באיזשהו תחום G אז סכום הטור הוא תמיד פונקציה הולומורפית ב- G . זה יאפשר לנו לפתח משפחות שלמות חדשות של פונקציות הולומורפיות. למעשה, בתחומים מסויימים ($G = \mathbb{C}$ או $G = D(0, 1)$) כך אפשר לקבל את כל הפונקציות ההולומורפיות.

נעשה תזכורת קצרה מחדו"א 2: יהיו $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ מספרים מרוכבים.

$$\sum_{n=0}^\infty c_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N c_n$$

אם הגבול קיים – מתכנס. אם הגבול לא קיים – מתבדר. תכונות:

תנאי הכרחי (ולא מספיק) להתכנסות טור הוא $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. הטור מתכנס בהיחט אם $\sum_{n=0}^\infty |c_n| < \infty$. התכנסות בהחלט גוררת התכנסות רגילה.

דוגמא. $q \in \mathbb{C}$. $\sum_{n=0}^\infty q^n = \frac{1}{1-q}$ מתכנס בהחלט אם $|q| < 1$ ומתבדר אחרת.