

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 8

17.03.11

העתקת מוביוס סטנדרטית שמעבירה מעגל היחידה לחצי מישור שמאלי וציר מדומה לציר ממשי:

$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

תרגיל. מצא העתקות מוביוס f כך ש- $f(UHP) = UHP$ כאשר: $UHP = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$

פתרון. נבדוק אילו העתקות שומורות על $\mathbb{R}$: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

ברור ש- $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \supseteq f(\mathbb{R})$ וגם $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \supseteq f^{-1}(\mathbb{R})$ כי $f(\infty) = \frac{a}{c}$, $f(-\frac{d}{c}) = \infty$.
ולכן, $f(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
ניקח $z \in UHP$. נתון ש- $\operatorname{Im} z > 0$. נבדוק אם גם $\operatorname{Im} f(z) > 0$.

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b-(ad)/c}{cz+d}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f(z) &= \operatorname{Im}\left(\frac{a}{c} + \frac{b-(ad)/c}{cz+d}\right) = \left(b - \frac{ad}{c}\right) \operatorname{Im}\left(\frac{1}{cz+d}\right) = \\ &= \left(b - \frac{ad}{c}\right) \operatorname{Im}\left(\frac{c\bar{z}+d}{|cz+d|^2}\right) = \frac{bc-ad}{|cz+d|^2} \operatorname{Im}(\bar{z}) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} \operatorname{Im}(z) \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ נסמן ב-}$$

$$\det A = ad - bc$$

קיבלנו:

אם $\det(A) > 0$ אז $f(UHP) \subseteq UHP$ ו- $f(LHP) \subseteq LHP$

ואם $\det(A) < 0$ אז $f(UHP) \subseteq LHP$ ו- $f(LHP) \subseteq UHP$ מתחלפים.

מכיון ש- f חח"ע ועל ו- $f(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

בהכרח: $f(UHP) = UHP$, $f(LHP) = LHP$

כאשר $\det(A) > 0$.

האם יש עוד העתקות מוביוס עם $f(UHP) = UHP$?

נראה שלא. אם $f(UHP) = UHP$ אז בהכרח $f(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

הסבר טופולוגי: (במישור המוכלל)

$$\partial(UHP) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

נראה שנקודה בשפה חייבת לעבור לנקודה בשפה. תהי $\{z_n\}$ בחצי מישור העליון ששואפת למספר A בשפה אז $\{f(z_n)\}$ גם נמצאת בחצי מישור העליון ושואפת לנקודה B . מרציפות $f(A) = B$. לא יכולה להיות בחצי המישור העליון כי נפעיל את ההעתקה ההפוכה ונקבל שגם A בחצי המישור העליון.

כנ"ל עם ההעתקה ההפוכה שגם כן רציפה.

נותר לנו להראות שאם $f(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ אז בהכרח $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ עם $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. ליתר דיוק, קיים $\lambda \in \mathbb{C}$ כך ש- $\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d \in \mathbb{R}$. כעת נוכל להניח כי d ממשי. אם $c = 0$ הוא ממשי. אם $c \neq 0$ אז $-\frac{d}{c} \rightarrow \infty$ ואנחנו יודעים ש- $f^{-1} \in \mathbb{R}$ והיות ו- d ממשי גם c ממשי. למה $a \in \mathbb{R}$? $f(\infty) = \frac{a}{c} \in \mathbb{R}$. למה b ממשי? $f(0) = \frac{b}{d} \in \mathbb{R}$.

תרגיל. מצאו את כל העתקות המבוסס עם $f(D) = D$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

כיצד אפשר לפתור בלי לעשות את כל ההוכחה מחדש? נמצא העתקה שתעביר את D לחצי המישור העליון, שם אנחנו יודעים לפתור ואז פשוט נעביר בחזרה.

אקספוננט מרוכב

הגדרה. עבור $z = x + iy$ נגדיר:

$$\exp(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$$

כאשר e^x אקספוננט ממשי.

תכונות:

$$1. |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$$

$$2. \arg(e^z) = \operatorname{Im}(z)$$

$$3. e^{2\pi i} = 1 \text{ ולמעשה } e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2\pi i k \text{ כאשר } k \in \mathbb{Z}$$

$$4. e^{z_1+z_2} = e^{z_1} + e^{z_2}$$

הוכחה.

$$\begin{aligned} e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)) &= \\ = e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i \sin y_1 \cos y_2 + i \cos y_1 \sin y_2) &= \\ = e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) = e^{z_1}e^{z_2} \end{aligned}$$

□

מסקנה. ל- e^z יש מחזור של $2\pi i$:

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^{z+2\pi i} = e^z$$

$$.5. e^z \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$$

$$.6. e^z \text{ הולומורפית.}$$

הוכחה.

$$u = \operatorname{Re} e^z = e^x \cos y$$

$$v = \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$$

u, v העתקות $\mathbb{R}$ -דיפרנציאביליות. מספיק לבדוק $C - R$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

לכן $f(z) = e^z$ גזירה. הגבול:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

קיים.

נחשב אותו:

$$f'(z) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^z$$

□

מה ההצדקה להגדרה של e^z ?

$$.1. f'(z) = f(z) \text{ הן היחידות שמקיימות } f'(z) = ce^z.$$

.2

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

.3. e^z היא הפונקציה ההולומורפית היחידה שמרחיבה את הגדרת האקספוננט הממשי.

ההוכחות לכל זה נראה בהמשך.

פונקציות טריגונומטריות ופונקציות היפרבוליות

עבור $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

אגף ימין אנחנו יודעים לעשות גם ל- θ מרוכבת. אז הגיוני להרחיב את גרף שמאל בהתאם:

הגדרה. לכל $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

וכן,

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

ובדומה להצדקות של e^z גם כאן, אלה הפונקציות היחידות עם הנגזרת המתאימה, שיש להן טור טיילור זהה ושהן הרחבה הולומוורפית יחידה לפונקציות הממשיות המתאימות. קוסינוס היפרבולי הוא סיבוב ב- 90° של קוסינוס:

$$\cos z = \cosh(iz)$$

$$\sin z = -i \sinh(iz)$$

מתי $\sin z = 0$?

$$e^{iz} - e^{-iz} = 0$$

$$e^{2iz} = 1$$

$$2iz \in \{2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$z = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

לא קיבלנו אפסים חדשים. לסינוס $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$\sin(z + 2\pi) = \sin(z)$$

ישירות מההגדרות. כלומר כל הנוסחאות שהיו לנו לפונקציות טריגונומטריות ב- $\mathbb{R}$ תקפות גם ב- $\mathbb{C}$. בהמשך הקורס עוד נזכיר את זה. כלומר:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$\sinh^2 z - \cosh^2 z = 1$$

$$(\sin z)' = \cos z$$

$$(\cos z)' = -\sin z$$

נוכיח את הראשונה וכל השאר נובעים ממה שהוכחנו ל- e^z באופן דומה.

$$\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = -\frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1$$

לוגריתם

הגדרה. יהי $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$. לוגריתם של a הוא מספר z כך ש- $e^z = a$. נסמן, $\log a$ קבוצת כל הלוגריתמים של a .

אם $a = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ כאשר $r > 0$. מתי $z = x + iy$ מקיים $e^z = re^{i\theta}$?

$$x = \ln(r)$$

$$y = \theta + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

כאשר $\ln$ הוא הלוגריתם הממשי.

לכן $\log(re^{i\theta}) = \{\ln r + i\theta + 2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\}$ באופן שקול

$$\log(z) = \ln|z| + i \arg(z)$$

נסמן עבור $z = re^{i\theta}, \theta \in (-\pi, \pi]$:

$$\text{Log}(z) = \ln r + i\theta$$

מתקיים:

$$\log z = \{\operatorname{Log}(z) + 2\pi i k : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$$

כאשר עבור קבוצות $A, B \subseteq \mathbb{C}$ מסמנים:

$$A + B = \{z + w : z \in A, w \in B\}$$

הסבר:
ידוע ש-

$$e^{\log(z_1 z_2)} = e^{\log(z_1) + \log(z_2)}$$

כלומר

$$1 = e^{\log(z_1 z_2) - \log(z_1) - \log(z_2)}$$

ולכן,

$$\log(z_1 z_2) - \log(z_1) - \log(z_2) = \{2\pi i k : k \in \mathbb{Z}\}$$

-1

$$\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$$

הערה. ייתכן

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)$$

אך מובטח ששני האגפים נבדלים בכפולה של $2\pi i$.

בכל זאת לא נרצה לעבוד עם קבוצות.

הגדרה. יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום. ענף של $\log$ הוא פונקציה רציפה $l : G \rightarrow \mathbb{C}$ כך ש-
 $\forall z \in G \quad e^{l(z)} = z$

דוגמא. $G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. $f(z) = \operatorname{Log}(z)$ היא ענף של $\log$ ב- G .
באותו אופן אפשר למצוא ענף של $\log$ בתחום מהצורה $\{\text{קרן שיוצאת מהראשית}\}$ $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ בפרט בחצי מישור שהראשית בשפתו יש ענף של $\log$.

טענה. $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום. u_1, u_2 ענפים של $\log$. אזי $u_1 - u_2 \equiv \text{const}$

הוכחה. u_1, u_2 רציפות.

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \frac{u_1(z) - u_2(z)}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$$

זאת פונקציה רציפה לכן $\frac{u_1 - u_2}{2\pi i}$ קבועה מקומית והיות וזה תחום היא קבועה.

□

משפט. יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ ו- $l : G \rightarrow \mathbb{C}$ ענף של $\log$. אז l הולומורפית ו- $l'(z) = \frac{1}{z}$.

הוכחה. אפשר לפי $C - R$ אבל נעדיף בדרך אחרת: $e^{l(z)} = z$. נגזור פונקציה הפוכה. (אם מניחים ש- l הולומורפית אז מכלל השרשרת מקבלים את l'). צריך לחשב את:

$$\lim_{G \ni z \rightarrow z_0} \frac{l(z) - l(z_0)}{z - z_0}$$

שינוי משתנים:

$$w = l(z) \quad z = e^w$$

כעת:

$$w_0 = l(z_0) \quad z_0 = e^{w_0}$$

מרציפות l

$$z \rightarrow z_0 \Leftrightarrow w \rightarrow w_0$$

ולכן נחליף משתנים בגבול (תרגיל בחדו"א 1 - להצדיק)

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{l(z) - l(z_0)}{z - z_0} = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}} = \frac{1}{\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{e^w - e^{w_0}}{w - w_0}} = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0}$$

□

הגדרה. תהי $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה הולומורפית שלא מתאפסת. ענף של $\log(f)$ היא פונקציה $u : G \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה כך ש-

$$\forall z \in G \quad e^{u(z)} = f(z)$$

ל- $\log z$ אין ענף ב- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ או בטבעת $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$. אחד ההסברים הוא שאין צמוד הרמוני ל- $\ln |z|$. הסבר נוסף הוא שהארגומנט הוא פונקציה עולה על מעגל היחידה עם כיוון השעון וכמובן שלא יכולה לעלות לאורך כל הדרך. לעומת זאת ל- $\log(f)$ ייצכן שיש ענף אפילו בכל $\mathbb{C}$. למשל ל- $\log(e^z)$ יש ענף, z או $z + 2\pi i$.

משפט. תהי $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית וניח ש- u ענף של $\log(f)$. אזי u הולומורפית ו-

$$\forall z \in G \quad u'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

לביטוי $\frac{f'(z)}{f(z)}$ קוראים נגזרת לוגריתמית.