

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 7

10.03.11

נמשיך לדבר על העתקות מוביוס שהם דוגמא של פונקציות הולומורפיות.

$$h_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

כאשר

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$$

ראינו ש-

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad h_A(z) = h_{\lambda A}(z)$$

$$h_{Id}(z) = z$$

$$h_{A^{-1}} = h_A^{-1}$$

$$h_{AB} = h_A h_B$$

מעבירה מעגלים מוכללים למעגלים מוכללים.
לכל $h_A \neq Id$ יש לכל היותר שתי נקודות שבת.

משפט. יהיו $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ שונות זו מזו $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$.
אז קיימת העתקת מוביוס h עם $h(z_j) = w_j$ $j = 1, 2, 3$.

נותר לנו להוכיח קיום.

הוכחה. ראינו מקרה פרטי: $w_1 = 1, w_2 = 0, w_3 = \infty$. אם $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ אז

$$h(z) = \frac{z - z_2}{z - z_3} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}$$

אם $z_3 = \infty$ באמת: $h(z) = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}$

אם $z_2 = \infty$ אז $h(z) = \frac{z_1 - z_3}{z - z_3}$

ואם $z_1 = \infty$ אז $h(z) = \frac{z - z_2}{z - z_3}$

לכן אנחנו יודעים להעביר כל שלשה ל- $1, 0, \infty$. איך נעבור למקרה הכללי? אפשר לכתוב נוסחא למקרה הכללי. אבל זה ארוך.

$$\langle z_1, z_2, z_3 \rangle \xrightarrow{f} \langle 1, 0, \infty \rangle$$

$$\langle w_1, w_2, w_3 \rangle \xrightarrow{g} \langle 1, 0, \infty \rangle$$

אפשרי עפ"י המקרה הכללי.

ההעתקה המבוקשת היא $h = g^{-1} \circ f$.

□

אז כל שלשה אפשר להעביר לכל שלשה באופן יחיד. טבעי לשאול, מה לגבי רביעיות? ראינו ששלשה קובעת את ההעתקה. אז אם אפשר אז יש ההעתקה אחת שתעבוד. אבל בכלל לא ברור שיש כזאת. נאפיין את הרביעות שאפשר להעביר לרביעיות אחרות. זה נקרא cross-ratio (יחס כפול).

נניח $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ שונות זו מזו. במקרה שהכל סופי נסמן:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

מה ההגיון בהגדרה הזאת? איך קבענו את האינדקסים?

אמרנו שיש העתקת מוביוס יחידה h עם $h(z_2) = 1, h(z_3) = 0, h(z_4) = \infty$. ומסמנים

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = h(z_1)$$

כלומר ערך הפונקציה בנקודה הראשונה שנקבעת ע"י 3 נקודות האחרות. מההגדרה ברור גם מה נעשה במקרה שיש נקודות לא סופיות - מגדירים לפי $(z_1, z_2, z_3, z_4) = h(z_1)$ כאשר $h(z_j) = w_j, j = 1, 2, 3$. זה היה ברור שבכלל לא ברור למה כתבתי את זה. טוב אז לכל 4 נקודות הגדרנו מספר. מה טוב בזה?

טענה. לכל העתקת מוביוס T ורביעיית נקודות שונות זו מזו $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ אז $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4)$.

הוכחה. ניקח h כך ש- $h(z_2) = 1, h(z_3) = 0, h(z_4) = \infty$. אז $(z_1, z_2, z_3, z_4) = h(z_1)$. מצד שני $h \circ T^{-1}$ מעבירה $h \circ T^{-1}(Tz_2) = 1, h \circ T^{-1}(Tz_3) = 0, h \circ T^{-1}(Tz_4) = \infty$, לכן, $(Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4) = (h \circ T^{-1})(Tz_1) = h(z_1)$. □

מסקנה.

1. יהיו $z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ שונות זו מזו וגם $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ שונות זו מזו. אזי

$$\forall z \in \overline{\mathbb{C}} (z, z_2, z_3, z_4) = (h(z), w_2, w_3, w_4)$$

כאשר h העתקת מוביוס עם $w_j = h(z_j)$ עם $j = 2, 3, 4$.

העתקת מוביוס $z \mapsto z$, לכן חח"ע ועל.

2. נניח $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$, $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \overline{\mathbb{C}}$. אזי קיימת h עם $h(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, 3, 4$.
 $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ אם ורק אם $h(z_1) = w_1$.
 מדוע? תהי h כך ש- $h(z_j) = w_j$, $j = 2, 3, 4$. אזי $h(z_1, z_2, z_3, z_4) = (h(z_1), w_2, w_3, w_4)$.
 $z \mapsto (z, z_2, z_3, z_4)$ היא חח"ע ועל ומקבלת את הערך (w_1, w_2, w_3, w_4) אם ורק אם $h(z_1) = w_1$.
 לכן, אם $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ בהכרח $h(z_1) = w_1$ וקיימת העתקה כנדרש.

נקודות סימטריות

נניח $l \subseteq \mathbb{C}$ ישר ונניח $z \in \mathbb{C}$ אז יש לה בן זוג טבעי - השיקוף שלה ביחס ל- l . מסמנים ב- $[z]_l^*$ את השיקוף של z ביחס ל- l .
 למשל $[z]_{\mathbb{R}}^* = \bar{z}$.
 נניח $C \subseteq \mathbb{C}$ מעגל. $z \in \mathbb{C}$. הנקודה שנתאים לה תהיה על המשך הרדיוס דרך z כך שאם המרחק מהמרכז ל- z הוא l_1 והמרחק עד $[z]_C^*$ הוא l_2 , והרדיוס הוא r אז $r = \sqrt{l_1 l_2}$.
 דוגמא. $C = \{z : |z| = 1\}$ אז $[z]_C^* = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$.
 משפט.

1. אם העתקת מביום מעבירה מעגל מוכלל C_1 למעגל מוכלל C_2 אז צמד נקודות סימטריות ביחס ל- C_1 עובר לצמד נקודות סימטריות ביחס ל- C_2 .
 2. $z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ שונות זו מזו נסמן ב- C את המעגל המוכלל היחיד העובר דרכן. אז:

$$([z]_C^*, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z_1, z_2, z_3, z_4)}$$

3. $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ נמצאות על אותו מעגל מוכלל אם ורק אם $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.