

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 6

10.03.11

בשיעור שעבר ראינו שאם $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ הולמורפית אז היא הרמונית, כלומר $\Delta f = 0$. במילים אחרות אם $f = u + iv$ אז $\Delta u = \Delta v = 0$ כאשר $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. כמסקנה $u(x + iy) = x^2$ אינה החלק הממשי של שום פונקציה הולמורפית, הרי $\Delta u = 2 \neq 0$ לכן לא הרמוני ולא לא יכול להיות חלק ממשי של פונקציה הולמורפית. מה לגבי $u(x, y) = x^2 - y^2$ האם היא יכולה להיות חלק ממשי של פונקציה הולמורפית? $\Delta u = 2 - 2 = 0$. כלומר זאת פונקציה הרמונית ולכן יש לה סיכוי להיות חלק ממשי של פונקציה הולמורפית. $f(x + iy) = (x^2 - y^2) + i2xy$ זאת הפונקציה $f(z) = z^2$ והיא כמובן הולמורפית ו- $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$.

טענה. נניח $u : G \rightarrow \mathbb{C}$ (אולי אפילו $u : G \rightarrow \mathbb{R}$) הרמונית, (גזירה פעמיים ברציפות) $\mathbb{R}$ אזי $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ היא פונקציה הולמורפית.

הוכחה. ניזכר ש-

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \Delta u$$

צ"ל ש- $g = \left| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right|$ היא פונקציה הולמורפית. נבדוק שקושי-רימן $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$ ואכן,

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{4} \Delta u = 0$$

□

הערה. גם הכיוון ההפוך נכון.

דוגמא. $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ הרמונית:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2 + y^2} & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{2y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{2(x^2 + y^2) - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{2(x^2 + y^2) - 4y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

ובאמת $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ו- u הרמונית. לכן,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

וזאת פונקציה הולמורפית ב- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

מתי פונקציה הרמונית היא באמת החלק הממשי/ המדומה של פונקציה הולמורפית?

הגדרה. נניח $v, u : G \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה הרמונית. אומרים ש- v הוא הצמוד ההרמוני של u אם $u + iv$ פונקציה הולומורפית.

דוגמאות.

1. $u(x, y) = x^2 - y^2$ הצמוד שלה הוא $v(x, y) = 2xy$.

2. אם v צמוד של u אז $v + 12$ צמוד של u .

3. אם v צמוד של u אז $-u$ צמוד של v . למה? כי אם $u + iv$ הולומורפית אז $-i(u + iv) = v - iu$ הולומורפית.

משפט. תהי $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה הרמונית. אז:

1. אם $G = \mathbb{C}$ קיים צמוד הרמוני.

2. לכל G הצמוד ההרמוני יחיד, עד כדי הוכחת קבוע.

בתחומים שאינם $\mathbb{C}$ לדוגמה, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ לא דווקא יש צמוד הרמוני. הוכחה.

1. נתונה u צריך למצוא v כך שיתקיים קושי רימן:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

כלומר צריך לשחזר את v עפ"י הנגזרת לפי x והנגזרת לפי y . מהמשוואה הראשונה:

$$v(x, y) = \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt + c(x)$$

הפונקציה הזאת פותרת את המשוואה הראשונה. הפונקציה יחידה עד כדי קבוע אבל לכל x יכול להיות קבוע משלו. איך נבחר את $c(x)$ שיישאר חלק? ננסה לבחור $c(x)$ כך ש- $c'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)$. נציב במשוואה השנייה:

תזכורת. איך גוזרים מתחת לסימן האינטגרל?

$$\frac{d}{dy} \int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx$$

למשל כאשר הנגזרות החלקיות של f רציפות וחסומות.

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= \int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dt + c'(x) = \\ &= \int_0^y -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, t) dt - \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = -\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)\right] - \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \\ &= -\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}$$

לכן משוואות קושי רימן מתקיימות. ל- v יש נגזרות חלקיות רציפות לכן $u + iv$ הולמורפית.

2. נניח $u + iv_1, u + iv_2$ פונקציות הולמורפיות. אז ההפרש $i(v_1 - v_2)$ פונקציה הולמורפית ולכן גם $v_1 - v_2$ הולמורפית. v_1, v_2 פונקציות ממשיות לכן גם ההפרש שלהן ממשי ופונקציה הולמורפית וממשיית בתחום G היא בהכרח קבועה.

□

ההוכחה עובדת גם ל- G קמור כלשהו.

המון דוגמאות

אילו פונקציות הולמורפיות מכירים?

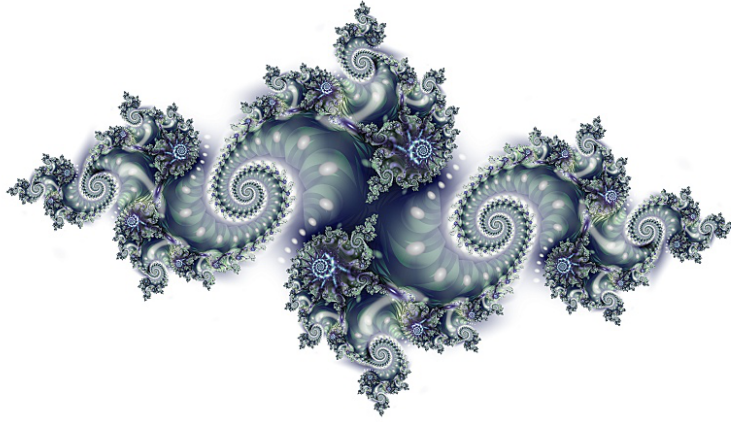
1. פונקציות לינאריות/אפיניות $f(z) = az + b$. ראינו איך פונקציות כאלה מתנהגות.
2. פונקציות ריבועיות $f(z) = z^2 \rightarrow re^{i\theta} \rightarrow r^2 e^{2i\theta}$. למשל הרביע הראשון יעבור לחצי העליון כולו. באופן כללי גזרה אינסופית תתרחב פי שתיים.
3. $z \mapsto z^2 + c$ יש גיאומטריה ודינמיקה די מסובכת עבור $c \neq 0$. ניקח לדוגמה $c = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$$f(z) = z^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

מה זה דינמיקה? עבור $z \in \mathbb{C}$ נביט בסדרה:

$$z, f(z), f(f(z)), \dots$$

נסמן ב- $A \subseteq \mathbb{C}$ את קבוצת ה- $z \in \mathbb{C}$ שעבורן הסדרה שואפת לאינסוף. לפונקציה לינארית קל לנתח את זה. אבל זה לא באמת כל כך פשוט. לקבוצה ∂A קוראים קבוצת Julia.



כמעט לכל c יש תמונות יפות כאלה. זה אכן יפה אבל כנראה שלא היינו רוצים ללמוד את זה ישר אחרי פונקציות לינאריות.

4. $f(z) = \frac{1}{z}$ מסתבר שהיא יותר פשוטה.

הגדרה. מעגל מוכלל ב- $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{0\}$ הוא:

1. מעגל: $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$ עבור $a \in \mathbb{C}, r > 0$.

2. ישר: $l = \{z \in \mathbb{Z} : \alpha \operatorname{Re} z + \beta \operatorname{Im} z + \gamma = 0\} \cup \{\infty\}$ כאשר $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.
 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

אם חושבים על $\bar{\mathbb{C}}$ באמצעות הטלה סטראוגרפית התמונה של ישר היא מעגל ה הספירה פרט לקוטב הצפוני. אמרנו שמתאימים את הקוטב לאינסוף אז טבעי להוסיף לישר את אינסוף.

טענה. דרך כל שלוש נקודות ב- $\mathbb{C}$ (שוונות זו מזה) עובר מעגל מוכלל אחד.

טענה. ההעתקה $f(z) = \frac{1}{z}$ ועם $f(0) = \infty, f(\infty) = 0$ מעבירה מעגל מוכלל למעגל מוכלל.

הוכחה. מעגל מוכלל $A \subseteq \bar{\mathbb{C}}$ אפשר להציג כך:

$$A \cap \mathbb{C} = \{z \in \mathbb{C} : \alpha |z|^2 + \beta \operatorname{Re} z + \gamma \operatorname{Im} z + \delta = 0\}$$

כאשר $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0), \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$
 אם ניקח $\alpha = 0$ נקבל את כל ישרים. אחרת, נניח בה"כ $\alpha = 1$ (מהומוגניות)

$$|z|^2 + \beta \operatorname{Re} z + \gamma \operatorname{Im} z + \delta = |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(z(\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}i)) + \delta = |z - (\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}i)|^2 + c(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

עתה,

$$\begin{aligned} f(A \cap \mathbb{C}) &= \{z \in \mathbb{C} : \alpha |\frac{1}{z}|^2 + \beta \operatorname{Re} \frac{1}{z} + \gamma \operatorname{Im} \frac{1}{z} + \delta = 0\} = \\ &= \{z : \alpha + \beta \operatorname{Re} \frac{\bar{z}}{|z|^2} + \gamma \operatorname{Im} \frac{\bar{z}}{|z|^2} + \delta |z|^2 = 0\} = \\ &= \{z : \delta |z|^2 + \beta \operatorname{Re} z - \gamma \operatorname{Im} z + \alpha = 0\} \end{aligned}$$

מעגל מוכלל אחר. צריך גם לוודא ש- $0, \infty$ לא בעייתיים וזה נובע מרציפות $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$. $\square$

$\frac{1}{z}$ שומר על מעגלים מוכללים, גם $az + b$ שומר על מעגלים וישרים ולכן גם ההרכבות שלהם.

הגדרה. העתקות Möbius

תהי $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ מטריצה 2×2 של מספרים מרוכבים. מסמנים:

$$h_A = \frac{az + b}{cz + d}$$

כאשר $\det(A) = ad - bc \neq 0$. בנוסף נגדיר את $h_A(\infty)$, $h_A(-\frac{d}{c})$ ע"י רציפות:

$$h_A(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} h_A(z) = \frac{a}{c} \quad (= \infty \text{ אם } c = 0, a \neq 0)$$

$$h_A(-\frac{d}{c}) = \lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{az + b}{cz + d} = \infty$$

כאשר $c \neq 0$. תרגיל: מדוע?

לסיכום עבור $A \in GL_2(\mathbb{C})$ הגדרנו את $h_A : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$.

טענה. לכל $A \in GL_2(\mathbb{C})$ ההעתקה h_A מעבירה מעגלים מוכללים למעגלים מוכללים.

הוכחה.

$$h_A(z) = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d}$$

$$z \mapsto cz + d \mapsto \frac{1}{cz + d} \mapsto \frac{a}{c} + (b - \frac{ad}{c}) \cdot \frac{1}{cz + d}$$

□ כל ההעתקות שומרות על מעגלים מוכללים ולכן גם ההעתקה.

למה בכלל רצינו לסדר את זה במטריצה?

טענה. $(h_A \circ h_B)(z) = h_{AB}(z)$ אזי $A, B \in GL_2(\mathbb{C})$.

הוכחה. נניח $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$

$$h_A(h_B(z)) = h_A\left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\right) = \frac{a_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} = \frac{a_1(a_2 z + b_2) + b_1(c_2 z + d_2)}{c_1(a_2 z + b_2) + d_1(c_2 z + d_2)}$$

□

כלומר העתקות מביוס מהוות חבורה.

מסקנה. 1. $h_{A^{-1}}$ הופכית ל- h_A . בפרט, $h_A : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ היא חח"ע ועל.

2. $h_{\lambda Id} = \frac{\lambda z + 0}{0 + \lambda} = z$ כלומר $h_{\lambda Id} = h_A \forall \lambda \neq 0$.

3. להעתקת מביוס יש לכל היותר שתי נקודות שבת ב- $\bar{\mathbb{C}}$, אלא אם $h_A(z) = z$.

הוכחה. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אם $c = 0$ אז h_A העתקה לינארית.

כלומר $h_A(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ אם $\frac{a}{d} = 1$ אז $h_A(z) = z + \frac{b}{d}$ אז רק ∞ היא נקודת שבת.
אם $\frac{a}{d} \neq 0$ אז ∞ היא נקודת שבת ובנוסף $z = \frac{-b}{a-d} \Leftrightarrow \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = z$
בסה"כ 2 נקודות שבת.

אם $c \neq 0$ אז $\frac{az+b}{cz+d} = z$ (לא נקודת שבת כי $f(\infty) = \frac{a}{c} \in \mathbb{C}$). אם $-\frac{d}{c}$ לא נקודת שבת לכן

$$\frac{az+b}{cz+d} = z \Leftrightarrow az+b = z(cz+d)$$

למשוואה ריבועית יש שני פתרונות לכל היותר. $\square$

מסקנה. אם להעתקת מביוס יש שלוש נקודות שבת היא בהכרח הזהות.

4. **טענה.** טרנזיטיביות בשלשות

נניח $z_1, z_2, z_3 \in \bar{\mathbb{C}}$ שונות זו מזו וכן $w_1, w_2, w_3 \in \bar{\mathbb{C}}$ גם הן שלוש נקודות שונות זו מזו.

אזי קיימת ויחידה העתקת מביוס f כך ש- $f(z_j) = w_j$ $j = 1, 2, 3$.

הוכחה. נוכיח יחידות. קיום נוכיח שיעור הבא.

נניח $(z_1, z_2, z_3) \xrightarrow{f} (w_1, w_2, w_3)$ וכן $(z_1, z_2, z_3) \xrightarrow{g} (w_1, w_2, w_3)$.
נביט בהעתקה $h = g^{-1} \circ f$ העתקת מביוס. כך ש- $h(z_j) = g^{-1}(f(z_j)) = w_j$
 $g^{-1}(w_j) = z_j$ לכן יש שלוש נקודות שבת ולכן h העתקת הזהות ואז בהכרח $f = g$. $\square$

דוגמא. נניח $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ו- $w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = \infty$. איך העתקה כזאת תעבוד?

$$f(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$