

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 5

06.03.11

בשיעור הקודם אמרנו שהעתקה הולומורפית עם $f'(z) \neq 0, \forall z \in G$ היא שומרת זוויות (קונפורמית). הסיבה לכך היא שהעתקה $\mathbb{C}$ לא טריוויאלית היא קונפורמית (והעתקה הולומורפית היא בקירוב $\mathbb{C}$ לינארית).

זה לא נכון עבור $\mathbb{R}$ לינארית. לדוגמא $f(z) = \bar{z}$ או $f(z) = (2x + iy) \mapsto (x + iy)$. $\mathbb{C}$ לינארית: $f(z) = az$.

וראינו למה: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ העתקה $\mathbb{R}$ לינארית אזי קיימים $a, b \in \mathbb{C}$ כך ש- $f(z) = az + b\bar{z}$. כאשר $a = \frac{\partial f}{\partial z}(0), b = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(0)$. דרך טובה להבין את כל זה, היא לנסות לבד, אז שני תרגילים:

תרגיל. נניח $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ עם $\text{Re}(f), \text{Im}(f)$ דיפ' ב- $z_0 = x_0 + iy_0$. הראו:

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) + R(x, y) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}(z - z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\overline{z - z_0}) + R(z) \end{aligned}$$

כאשר $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R(z)}{z - z_0} = 0$.

תרגיל. כלל השרשרת: לכל עקומה גזירה γ והעתקה $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ דיפרנציאבילית,

$$(f \circ \gamma)' = \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t_0))(\dot{\gamma})(t_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\gamma(t_0))(\dot{\gamma})(t_0)$$

נראה שאין עוד העתקות שומרות זוויות חוץ מהעתקות הולומורפיות. מדוע רוצים את זה? זה נותן דרך מאוד גיאומטרית להבין מיהן העתקות הולומורפיות.

למה. נניח $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ שהיא העתקה $\mathbb{R}$ -לינארית אזי f קונפורמית אם"ס קיים $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$ כך ש-

$$f(z) = az \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

הוכחה. $\Rightarrow$ ראינו כי $f'(z) = a \neq 0 \Leftrightarrow$ נתונה f העתקה $\mathbb{R}$ -לינארית $f(z) = az + b\bar{z}$. הוכחה: נראה כי $a \neq 0$. אחרת, $f(z) = b\bar{z}$, כלומר:

$$\begin{array}{ccc} z & \xrightarrow{\quad} & \bar{z} \\ \underbrace{\quad} & & \underbrace{\quad} \\ \text{הופכת זוויות} & & \text{שומרת זוויות} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \bar{z} & \xrightarrow{\quad} & b\bar{z} \end{array}$$

בסה"כ ההעתקה הופכת זוויות ובסתירה.

שלב 2: ידוע כי $a \neq 0$. ניקח שתי עקומות: γ_1 ציר ה- x ו- γ_2 הישר שעובר דרך הנקודה λ על מעגל היחידה. אז

$$\arg(\gamma_2) - \arg(\gamma_1) = \arg(\lambda) = \theta$$

אחרי ההעסקה f :

$$f(1) = a + b$$

$$f(\lambda) = a\lambda + b\bar{\lambda}$$

לכן,

$$\arg(\underbrace{a\lambda + b\bar{\lambda}}_{=\lambda(a+b\frac{\bar{\lambda}}{\lambda})}) - \arg(a+b) = \arg(\lambda)$$

$$\arg(\lambda) + \arg(a + b\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}) = \arg(\lambda) + \arg(a+b)$$

קיבלנו ש- $a + b\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}$ על הישר שעובר דרך $a+b$ ודרך הראשית. לסיכום לכל $|\lambda| = 1$

$$a + b\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \in l = \{z \in \mathbb{C}; \arg(z) = \arg(a+b)\}$$

רוצים להראות ש- $b=0$.

אם $b \neq 0$ כש- λ רץ על מעגל היחידה גם $\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}$ רץ על מעגל היחידה ולכן $Image(a + b\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}) = Image(\frac{\bar{\lambda}}{\lambda})$ כמסלול $Image(\frac{\bar{\lambda}}{\lambda})$ כמסלול λ רץ על מעגל היחידה הוא שוב מעגל היחידה?

$$e^{i\theta} \mapsto \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-2i\theta}$$

ההעסקה $a+bz$ תעביר מעגל שמרכזו ב-0 ורדיוסו 1 למעגל שמרכזו a ורדיוסו $|b|$. □

משפט. נניח $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ העקתה $\mathbb{R}$ -דיפרנציאלית וקונפורמית. אזי f הולומורפית עם $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in G$.

הוכחה. תהי $z_0 \in G$. נניח ש- γ_1, γ_2 עקומות רגולריות ו- $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$. מכלל השרשרת, $(f \circ \gamma_j)'(t_j) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\dot{\gamma}_j(t_j) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\dot{\gamma}_j(t_j)$, ל- $j=1,2$. אם נסמן $a = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)$, מקונפורמיות:

$$(*) \arg(a\dot{\gamma}_2 + b\overline{\dot{\gamma}_1}) - \arg(a\dot{\gamma}_1 + b\overline{\dot{\gamma}_1}) = \arg(\dot{\gamma}_2) - \arg(\dot{\gamma}_1)$$

זה נכון לכל שתי עקומות לכן $(*)$ מתקיים לכל שני וקטורים $\dot{\gamma}_1(t_1), \dot{\gamma}_2(t_2)$

$$\lambda \mapsto a\lambda + b\bar{\lambda}$$

היא העתקה קונפורמית ומהלמה $b = 0, a \neq 0$
 כלומר f הולומורפית ו- $a = f'(z_0) \neq 0$.
 לכן $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

□

$$C - R \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

ואם משוואות קושי-רימן מתקיימות אז

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$

מה עוד אפשר לסחוט ממשוואות קושי רימן?

הגדרה. $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ נקראת הרמונית אם הנגזרות מסדר 2 שלה קיימות ורציפות וכן:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Δu נקרא הלפלאסיאן.

הגדרה. $u : G \rightarrow \mathbb{C}$ נקראת הרמונית אם $\text{Re}(f)$ וגם $\text{Im}(f)$ הן פונקציות הרמוניות. באופן שקול: אם $f = u + iv$ אז $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$, כלומר f הרמונית אם $\Delta f = 0$.

טענה. תהי f הולומורפית ב- G . נוכיח יום אחד של- f יש נגזרות חלקיות רציפות מסדר 2. אזי f הרמונית, כלומר $\text{Re}(f), \text{Im}(f)$ הרמוניות.

הוכחה. דרך 1:

$$f = u + iv$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

ולכן

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

ולכן $\Delta u = 0$. כנ"ל לגבי v .

דרך 2:

ממשוואות קושי רימן:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

נחשב:

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right] \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right) = \frac{1}{4} \Delta f$$

□

נשים לב ש- $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \Delta f$