

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 4

03.03.11

אנחנו עדיין מדברים על נגזרת מרוכבת.

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

כתוצאה מזה שצריך לשאוף לנגזרת מכל הכיוונים האפשריים יש פונקציות נעימות שאינן גזירות, לדוגמא $\bar{z}$.

בשיעור שעבר הוכחנו שאם f פונקציה $\mathbb{C}$ -גזירה ב- z_0 נסמן $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ עבור $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ אזי u, v דיפרנציאביליות בנק' (x_0, y_0) . והסקנו את משוואות קושי-רימן:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

איך זוכרים אותן?

$$1. \text{ דוגמא } f(z) = z^2 = \underbrace{(x^2 - y^2)}_u + i \underbrace{2xy}_v$$

ואז

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x & \frac{\partial v}{\partial x} &= 2y \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -2y & \frac{\partial v}{\partial y} &= 2x \end{aligned}$$

2. נגזור בשני כיוונים ונשווה:

$$f'(z_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{(x + iy_0) - (x_0 + iy_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0 + iy) - f(x_0 + iy_0)}{(x_0 + iy) - (x_0 + iy_0)}$$

נכתוב במונחי נגזרות חלקיות:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

כלומר אם $f = u + iv$ אז $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$.

ולכן $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ כאשר f גזירה ב- z_0 .

באותו אופן:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0 + iy) - f(x_0 + iy_0)}{i(y - y_0)} = \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial y}$$

ולכן $f'(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$

קיבלנו:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

נשווה חלק ממשי וחלק מדומה ונקבל את משוואות קושי רימן.

כלומר, קיבלנו ניסוח שקול למשוואות קושי רימן:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

סימון מקובל:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right]$$

כעת ניסוח שקול שני:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow C - R$$

סימון:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right]$$

סימון אחר לגמרי:

$$\frac{df}{dz} = f'(z_0)$$

נשים לב כי f היא $\mathbb{C}$ גזירה:

$$\frac{df}{dz} = f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ זאת באמת נגזרת בכיוון y . אז מהו $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$? הסיבה היא שלכל f חלקה:

$$f(z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z - z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\bar{z} - \bar{z}_0) + o(z - z_0)$$

אנחנו לא נחשוב שזאת נגזרת בכיוון $\bar{z}$.

טענה. נניח $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום, $x_0 + iy_0 = z_0 \in G$. $u + iv = f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ו- $x_0 + iy_0 = z_0 \in G$. נניח ש- u, v דיפרנציאביליות בנקודה (x_0, y_0) ומקיימות שם משוואות קושי-רימן. אזי f היא גזירה ב- z_0 .

הוכחה. נסמן $a = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ו- $b = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ מדיפ' u, v יודעים:

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + R_1$$

$$v(x, y) - v(x_0, y_0) = -b(x - x_0) + a(y - y_0) + R_2$$

כאשר:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{R_j(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

עבור $j = 1, 2$.

לכן אם נחבר המשוואות:

$$\begin{aligned} (u(x, y) - u(x_0, y_0)) + i(v(x, y) - v(x_0, y_0)) &= \\ &= a(x - x_0) + b(y - y_0) - ib(x - x_0) + ia(y - y_0) + R_1 + iR_2 = \\ &= (a - ib)((x - x_0) + i(y - y_0)) + R_1 + iR_2 = (a - ib)(z - z_0) + o(z - z_0) \end{aligned}$$

כלומר קיבלנו:

$$f(z) - f(z_0) = (a - ib)(z - z_0) + o(z - z_0)$$

ולכן $f'(z_0) = a - ib$.

□

הגדרה. יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום. $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ נקראת הולומורפית (אנליטית) אם $f'(z)$ קיים בכל $z \in G$.

אומרים ש- f הולומורפית ב- z_0 אם יש סביבה של z_0 שבה f הולומורפית. מעכשיו נשתמש במושגים החדשים כדי לא להתבלבל עם גזירות ממשית.

מסקנות. מקושי-רימן

1. $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ תחום f הולומורפית אז f קבועה $\Leftrightarrow f'(z) = 0 \quad \forall z \in G$.

$\Leftarrow$ ברור.

$\Rightarrow$:

$$0 = f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \text{ לכן } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

אז f קבועה מקומית ולכן קבועה.

2. נניח $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית וממשית. אז f קבועה.

הוכחה. נניח ש- f ממשית והולומורפית. אז $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ ממשיים. אבל משוואות קושי-רימן

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

□

לכן $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. וכמו קודם $f' = 0$ לכל $z \in G$.

3. נניח G תחום, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה הולומורפית כך ש- $|f|$ קבוע ב- G . אז f קבועה.
(נראה אח"כ שתמונה של פונקציה הולומורפית לא קבועה היא קבוצה פתוחה).

הוכחה. הוכחה. $f = u + iv$ אז $u^2 + v^2 = \text{const}$. אז:

$$2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$2u \frac{\partial u}{\partial y} + 2v \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

u, v גזירות כי הפונקציה הולומורפית.

נשתמש בקושי-רימן כדי שיהיו פחות משתנים:

$$uu_x - vu_y = 0$$

$$uu_y + vu_x = 0$$

$$\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אם $u^2 + v^2 = 0$ אז $f = 0$. אחרת $u^2 + v^2 = \text{const} \neq 0$ לכן,

$$\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix} = u^2 + v^2 \neq 0$$

□

לכן המטריצה הפיכה ולכן $u_x = u_y = 0$ ו- $0 = f'(z_0)$.

אפשר להמשיך לכתוב דברים כאלה (לדוגמא ארגומנט קבוע) אבל בסופו של דבר נסיק הכל מהמשפט שהזכרנו לגבי זה שהתמונה היא קבוצה פתוחה.

איך לדמיין פונקציה הולומורפית?

הדוגמא הפשוטה ביותר היא פונקציה לינארית (אפינית). $f(z) = az + b$ ונחשוב איזה צורות היא מעבירה לאיזה צורות. דוגמא ראשונה – הזזה. $f(z) = z + b$

$$z \mapsto z + (1 + i)$$

:

ERUTCIPI

העתקה נוספת שקל להבין היא מהצורה $f(z) = rz$ $r > 0$ זה העתקה שמנפחת או מקווצת: $z \mapsto 5z$

עוד דוגמא: $f(z) = e^{i\theta}z$ עבור $\theta \in \mathbb{R}$ סיבוב נגד כיוון השעון ב- θ רדיאנים. $z \mapsto e^{i\pi/2}z$

ERUTCIPI

כל העתקה לינארית נרשום בתור $z \mapsto (e^{i\theta}rz) + b$ ולכן כל העתקה לינארית היא למעשה נתיחה + סיבוב + הזזה. בפרט, עיגול עובר לעיגול תחת העתקה $\mathbb{C}$ – לינארית. אי אפשר לשקף ואי אפשר למתוח רק ציר אחד עם העתקה $\mathbb{C}$ – לינארית. לכן נגיד $\bar{z}$ אינה העתקה לינארית. זה מעודד כי אנחנו יודעים שכל העתקה הולומורפית היא בקירוב העתקה $\mathbb{C}$ – לינארית מקומית.

$$f(z) \approx \underbrace{f(z_0)}_{\text{הזזה}} + \underbrace{f'(z_0)}_{\text{נתיחה וסיבוב}} (z - z_0)$$

לכן, למשל באופן מקומי (אינפיניטסימלי) עיגול קטן עובר לעיגול קטן אחר (וממש לא לאליפסה) דרך אלגנטית לאמר זאת: העתקה הולומורפית היא שומרת זוויות (קונפורמית). אבל בכלל לא הגדרנו מה זה זווית. זווית חיתוך בין עקומות זה הזווית בין המשיקים שלהם בנקודת החיתוך. העתקה הולומורפית תעביר אותם לעקומות אחרות אבל המשיקים באותה הנקודה ישמרו על הזווית ביניהם. למה זה נכון בכלל? כי מסתכלים על סביבה מאוד קטנה סביב נקודה ואז בגלל שהפונקציה היא למעשה העתקה לינארית בסביבה מאוד קטנה אז היא מותחת מסובבת ומזיזה ולכן שומרת על הזווית.

הגדרה. מסילה או עקומה היא פונקציה רציפה $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ כאשר $I \subseteq \mathbb{R}$ הוא קטע.

הגדרה. מסילה $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ נקראת סגורה אם $\gamma(a) = \gamma(b)$.

דוגמאות.

$$1. \text{ קטע } t \in [0, 1], \gamma(t) = tz + (1-t)w$$

$$2. \gamma = e^{it} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{מעגל היחידה נגד כיוון השעון. אם } t \in [0, 10\pi] \text{ היינו מסתובבים עליו 5 פעמים.}$$

3. משולש:

$$\gamma(t) = \begin{cases} tB + (1-t)A & 0 \leq t \leq 1 \\ (t-1)C + (2-t)B & 1 \leq t \leq 2 \\ (t-2)A + (3-t)C & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

אפשר לחשוב על $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. אומרים ש- γ גזירה ב- t_0 אם $x(t), y(t)$ גזירים ב- t_0 ומסמנים:

$$\dot{\gamma}(t_0) = \gamma'(t_0) = \frac{d\gamma}{dt} = \dot{x} + i\dot{y} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

הקטע חוץ מהקצוות חלק, המעגל בטוח חלק והמשולש חלק בכל מקום חוץ מהפינות. אבל אם היינו עוצרים לגמרי בפינות גם הן היו נקודות בהם המסילה חלקה ולכן נצטרך עוד הגדרה:

הגדרה. γ נקראת רגולרית ב- t_0 אם היא גזירה ב- t_0 ובנוסף $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$.

אם γ רגולרית בנקודה t_0 הוקטור $\frac{\dot{\gamma}(t_0)}{|\dot{\gamma}(t_0)|}$ הוא "כיוון המשיק" בנקודה $\gamma(t_0)$.

הגדרה. נניח γ_1, γ_2 עקומות עם $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$. נניח ש- γ_j רגולרית ב- t_j כאשר $j = 1, 2$. הזווית בין γ_1 ל- γ_2 היא: $\arg(\dot{\gamma}_2(t_2)) - \arg(\dot{\gamma}_1(t_1))$.

אם מחליפים בין העקומות הזווית משנה סימן.

טענה. כלל השרשרת נניח γ גזירה ב- t_0 , f הולומורפית ב- $\gamma(t_0)$ אזי:

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\dot{\gamma}(t_0)$$

הוכחה. כלל השרשרת מחדו"א 2:

$$\frac{d}{dt}f(x(t) + iy(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}(t_0)$$

נרשום במונחי משוואות קושי-רימן:

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x}(\dot{x} + i\dot{y}) = f'(\gamma(t_0))\dot{\gamma}(t_0)$$

□

משפט. נניח $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית ו- $f'(z) \neq 0$ לכל $z \in G$. אזי f היא קונפורמית, כלומר שומרת זוויות. באופן מפורש: הזווית בין $f \circ \gamma_1$ ו- $f \circ \gamma_2$ שווה לזווית בין γ_1 ו- γ_2 .

הקפדנו על כך שהנגזרת לא תתאפס כדי להיא לא תיקח את העקומות לנקודה.

הוכחה. יהיו γ_1, γ_2 עקומות ב- G כך ש- $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$. נניח ש- $\gamma_j(t_j)$ רגולריות עבור $j = 1, 2$. צריך להוכיח:

$$\arg(\dot{\gamma}_2(t_2)) - \arg(\dot{\gamma}_1(t_1)) = \arg((f \circ \gamma_2)'(t_2)) - \arg((f \circ \gamma_1)'(t_1))$$

נסמן $G \ni z_0 = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$

$$\arg((f \circ \gamma_j)'(t_j)) = \arg(f'(t_0)\dot{\gamma}_j'(t_j)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(\dot{\gamma}_j'(t_j))$$

לכל $j = 1, 2$.

מכאן ש- $\arg((f \circ \gamma_2)'(t_2)) - \arg((f \circ \gamma_1)'(t_1)) = [\arg f'(z_0) + \arg \dot{\gamma}_2'(t_2)] - [\arg f'(z_0) + \arg \dot{\gamma}_1'(t_1)] = \arg \dot{\gamma}_2'(t_2) - \arg \dot{\gamma}_1'(t_1)$

□

רוצים להראות את ההפך: שהעתקה קונפורמית היא הולומורפית.
 נתחיל מהעתקות לינאריות: אילו העתקות $\mathbb{R}$ -לינאריות שומרות זוויות?
 $f(z) = \bar{z}$ אינה שומרת על הזוויות אלה הופכת אותן! העתקה כזאת נקראת אנטי-קונפורמית.

טענה. נניח $f : \underbrace{\mathbb{C}}_{=\mathbb{R}^2} \rightarrow \underbrace{\mathbb{C}}_{=\mathbb{R}^2}$ העתקה $\mathbb{R}$ -לינארית. אזי,
 $\forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = az + b\bar{z}$
 כאשר $b = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(0)$, $a = \frac{\partial f}{\partial z}(0)$

זאת הסיבה האמיתית שהגדרנו את האופרטורים האלה.

הוכחה. מכיוון ש- f היא $\mathbb{R}$ -לינארית אז:

$$f(x + iy) = \frac{\partial f}{\partial x}(0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0)y$$

לכל $x + iy \in \mathbb{C}$.

$$f(x + iy) = \frac{\partial f}{\partial x}(0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0)y = \frac{1}{2}[\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}] + \frac{1}{2}[\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}](x - iy)$$

□

כלומר,
 $f(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(0)z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(0)\bar{z}$