

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 26

9.6.11

דיברנו על נוסחאת פיק. אם יש פונקציה הולומורפית $f : D \rightarrow D$ אז $|f'(z)| \leq \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$ ואם יש שוויון בנקודה מסוימת אז f אוטומורפיזם. ואנחנו יודעים שאוטומורפיזמים הם מהצורה $e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

ראינו את המישור ההיפרבולי. עבור $\gamma : [a, b] \rightarrow D$, $L_H(\gamma) = \int_a^b \frac{|\dot{\gamma}(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} dt$. דיברנו גם על מטריקה היפרבולית: $d_H(a, b) = \inf\{L_H(\gamma); a \rightsquigarrow b\}$. הוכחנו שאם $f : D \rightarrow D$ הולומורפית אז f מכווצת, כלומר $d_H(f(a), f(b)) \leq d_H(a, b)$. אם מתקיים שוויון עבור $a \neq b$, אז $f : D \rightarrow D$ אוטומורפיזם. העתקות מוביזם $e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ הן איזומטריות של המטריקה ההיפרבולית. מצאנו שבין כל שתי נקודות קיים ויחיד גאודזי והוא תמיד מוכלל במעגל מוכלל שפוגש את ∂D בזוויות ישרה.

מה הנוסחא למרחק בין a ל- b ? מקרה ראשון: $a = 0, b = r > 0$. הגאודזי הוא פשוט הקטע $[0, b]$ ולכן האורך ההיפרבולי הוא $d_H(0, r) = \int_0^1 \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$. מקרה שני: $a = 0, b$ כלשהו: נחפש העתקת מביזם שתעביר למקרה הקודם והעתק מביזם שומרת מרחקים. ניקח העתקת סיבוב:

$$d_H(0, b) = d_H(0, |b|) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+|b|}{1-|b|}$$

מקרה שלישי: a, b כלשהם. נעביר ל-0 ונקודה כלשהי עם העתק מביזם:

$$d_H(a, b) = d_H\left(0, \frac{b-a}{1-\bar{a}b}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\left|\frac{b-a}{1-\bar{a}b}\right|}{1-\left|\frac{b-a}{1-\bar{a}b}\right|}$$

הערה. אי שוויון המשולש נובע מזה שההגדרה של מרחקים היא על אינפימום על מסילות.

$$\text{תרגיל. } \frac{d_H(0, z)}{|z|} \xrightarrow{z \rightarrow 0} 1.$$

תרגיל. ניקח העתקה הולומורפית $f : D \rightarrow D$ למשל $f(z) = z^2$. יודעים ש- $d_H(a^2, b^2) < d_H(a, b)$ צ"ל ש- f מכווצת ממש מקומית, כלומר לכל $z_0 \in D$ קיים $\varepsilon > 0, r > 0$ כך ש-

$$\forall z, w \in D(z_0, r) \quad d_H(f(z), f(w)) \leq (1 - \varepsilon) d_H(z, w)$$

מודל חצי מישור העליון למישור ההיפרבולי

$$\mathbb{H} = \{x + iy : y > 0\}$$

$$L_{\mathbb{H}}(\gamma) = \int_a^b \frac{|\dot{\gamma}(t)|}{\text{Im } \gamma(t)} dt, \gamma[a, b] \rightarrow \mathbb{H}$$

נגדיר עבור $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ המרחקים גדלים בדיוק כמו שגדלו כשמתקרבים לשפה במודל הקודם.

נכונות של מודל חצי המישור העליון:

1. אוטומורפיזם (העתקות הולומורפיות חח"ע ועל מ- $\mathbb{H}$ ל- $\mathbb{H}$) שומרים על $L_{\mathbb{H}}$.

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, ad-bc=1, a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

למשל, ההעתקה $z \mapsto 5z$ היא אוטומורפיזם.

2. העתקות הולומורפיות הן מכווצות (מכווצות ממש מקומית אלא אם איזומטריות).

3. יש גאוגז בין כל שתי נקודות - מעגלים מוכללים שפוגשים את השפה ($\mathbb{R}$) בזווית ישרה.

איך נוכיח את התכונות? ינבעו מהתכונות המקבילות למודל הדיסק. יש העתקה חח"ע ועל והולומורפית $f : \mathbb{H} \rightarrow D$, כך ש- $L_{\mathbb{H}}(\gamma) = L_D(f \circ \gamma)$ לכל עקומה γ כאשר L_D המטריקה שפועלת בדיסק ו- $L_{\mathbb{H}}$ המטריקה שפועלת ב- $\mathbb{H}$.

$$f(z) = \frac{iz+1}{z+i}$$

גם $e^{i\theta} f$ יעבוד.

נוכיח ש- $L_{\mathbb{H}}(\gamma) = L_D(\gamma_1)$ רוצים להראות $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow D$, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$, $\gamma_1 = f(\gamma(t))$.

$$L_{\mathbb{H}}(\gamma) = \int_a^b \frac{|\dot{\gamma}(t)|}{\text{Im } \gamma(t)} dt = \int_a^b \frac{|\dot{\gamma}_1(t)|}{1 - |\gamma_1(t)|^2} dt$$

$$\dot{\gamma}_1(t) = f'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)$$

$$\int_a^b \frac{|\dot{\gamma}(t)|}{\text{Im } \gamma(t)} dt = \int_a^b \frac{|f'(\gamma(t))| \cdot |\dot{\gamma}(t)|}{1 - |f(\gamma(t))|^2} dt$$

$$\frac{1}{\text{Im } z} = \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2}, z \in \mathbb{H}$$

נראה שלכל $z \in \mathbb{H}$ נודא:

$$f(z) = \frac{iz+1}{z+i}$$

$$f'(z) = \frac{i(z+i) - (iz+1)}{(z+i)^2} = \frac{-2}{(z+i)^2}$$

$$|f(z)|^2 = f(z) \overline{f(z)} = \frac{iz+1}{z+i} \cdot \frac{-i\bar{z}+1}{\bar{z}-i}$$

מכאן אפשר לקבל את הדרוש.

משפט ההעתקה של רימן

נראה יישום של הגיאומטריה ההיפרבולית כדי להוכיח את משפט ההעתקה של רימן.

משפט. נניח $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום פשוט קשר שאינו $\mathbb{C}$. תהי $z_0 \in G$. אזי קיימת יחידה $f : G \rightarrow \mathbb{D}$ הולומורפית, חח"ע ועל עם $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$, $\mathbb{R} \ni f'(z_0) > 0$.

הערה. לא הרשנו כל $\mathbb{C}$ כי אז ההעתקה הייתה קבועה.

הערה. דרשנו פשוט קשר כי $\mathbb{D}$ הוא פשוט קשר והומאומורפיזמים שומרים על תכונה זו.

הוכחה. משפט רימן

הערה. נחליף sup ב-max ללא הוכחה. הוכחה אפשר לראות אצל Sarason.

נתון $G \subsetneq \mathbb{C}$, פשוט קשר. רוצים $f : G \rightarrow \mathbb{D}$ חח"ע, על והולומורפית. נביט ב- $\mathcal{F} = \{f : G \rightarrow \mathbb{D} : f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0\}$ הולומורפית, חח"ע, $f \in \mathcal{F}$ רוצים למצוא $f \in \mathcal{F}$ שהיא על $\mathbb{D}$ וגם $f'(z_0) > 0$ וגם $f \in \mathcal{F}$ נבחר ב- $f \in \mathcal{F}$ עם $|f'(z_0)|$ מקסימלי.

אסטרטגיה: נבחר ב- $f \in \mathcal{F}$ עם $|f'(z_0)|$ מקסימלי.

• שלב א': להראות ש- $\mathcal{F}$ לא ריקה.

• שלב ב': להראות שיש $f \in \mathcal{F}$ עם $|f'(z_0)|$ מקסימלי.

• שלב ג': קיבלנו את מה שרצינו.

שלב א': חייבים להשתמש בכך ש- $G \neq \mathbb{C}$. לא צריך לדואג ל- $f(z_0) = 0$. מספיק העתקה חח"ע הולומורפית מהתחום לדיסק, כי אפשר להרכיב אחר כך עם מביוס.

מספיק למצוא העתקה הולומורפית וחח"ע למשלים של הדיסק. ואז ניקח $\frac{1}{f(z)}$. נמצא העתקה הולומורפית חח"ע מ- G למשלים של איזשהו דיסק.

יש $a \notin G$. G פשוט קשר לכן יש ענף של $\sqrt{z-a}$. כלומר יש $h : G \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית כך ש- $h^2(z) = z-a$. מכך ש- $h^2(z) = z-a$, נובע שאם $w \in h(G)$ אז $0 \neq w$ אז $-w \notin h(G)$. למה? אם $h(z_1) = -h(z_2)$ אז $h^2(z_1) = h^2(z_2) = z_2 - a$ ולכן $z_1 = z_2$. הקבוצה $h(G)$ פתוחה, מכילה דיסק $D(w_0, r)$ ולכן $h(G)$ זרה ל- $D(-w_0, r)$ וסיימנו. שלב ב': נסמן $M = \sup\{|f'(z_0)| : f \in \mathcal{F}\}$. אזי קיימת $f \in \mathcal{F}$ עם $|f'(z_0)| = M$. לא נוכיח את זה, אבל שוב אפשר לראות הוכחה בספר.

שלב ג': נתונה $f \in \mathcal{F}$ כך ש- $|f'(z_0)| \geq |g'(z_0)|$ לכל $g \in \mathcal{F}$. נראה ש- f היא על $\mathbb{D}$. וזה מספיק כי נבחר θ כך ש- $e^{i\theta} f'(z_0) > 0$ ומצאנו את ההעתקה המבוקשת.

למה. נניח $0 \in \Omega \subseteq \mathbb{D}$ פשוט קשר, $\Omega \neq \mathbb{D}$. אזי קיימת $h : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ הולומורפית, חח"ע, $h(0) = 0$, $|h'(0)| > 1$.

נראה איך מסיימים את הוכחת המשפט בהינתן הלמה. נניח בשלילה ש- $f(G) \neq \mathbb{D}$. $f(G)$ פשוט קשר, $0 \in f(G)$. מהלמה קיימת $h : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$. נביט ב- $h \circ f : G \rightarrow \mathbb{D}$ חח"ע הולומורפית, $(h \circ f)(z_0) = 0$ ולכן

$$|(h \circ f)'(z_0)| = \underbrace{|h'(0)|}_{>1} \cdot |f'(z_0)|$$

מצאנו $h \circ f \in \mathcal{F}$ עם $|f'(z_0)| > |(h \circ f)'(z_0)|$ בסתירה למקסימליות. $\square$

הוכחה. הוכחת הלמה

נמצא $b \in \mathbb{D} \setminus \Omega$. נבעיר את b ל- 0 עם העתקת מביוס שמעבירה את הדיסק לעצמו. התמונה של Ω לא מכילה את 0 (כי Ω לא מכילה את b) והיא עדיין פשוט קשר. יש ענף של שורש ולכן נפכיל את $\sqrt{z}$. כעת נפעיל עוד העתקת מביוס כך שבהרכבה של כל ההעתקות 0 יעבור ל- 0 .

h הולומורפית, חח"ע, $h(0) = 0$ רק נשאר להוויח ש- $|h'(0)| > 1$. נוכיח ש- h העתקה מרחיבה ממש מקומית ב-0, ביחס למטריקה ההיפרבולית. כלומר נוכיח שלכל $\varepsilon, \delta > 0$ כך שאם $|z|, |w| < \delta$ אז $d_H(h(z), h(w)) \geq (1 + \varepsilon)d_H(z, w)$. מה שנותן להוויח הוא ש- $z \mapsto \sqrt{z}$ היא העתקה מרחיבה ממש מקומית היפרבולית בנקודה $a \in \mathbb{D}$ היא התמונה של 0 תחת המביוס הראשון). כזכור ההעתקה $z \mapsto z^2$ מכווצת מקומית בכל נקודה בדיסק ולכן ההעתקה ההפוכה חייבת להרחיב. $d_H(\sqrt{z}, \sqrt{w}) > \frac{1}{1-\varepsilon}d_H(z, w) \Leftrightarrow d_H(z^2, w^2) < (1-\varepsilon)d_H(z, w)$. לסיכום $\exists \varepsilon, \delta > 0$ $d_H(h(z), h(w)) \geq (1 + \varepsilon)d_H(z, w) \Rightarrow |z|, |w| < \delta$

$$\frac{d_H(h(z), 0)}{d_H(z, 0)} \cdot \frac{|z|}{|h(z)|} \cdot \frac{|h(z)|}{|z|} \geq 1 + \varepsilon$$

כאשר $z \rightarrow 0$
קיבלנו,

$$\liminf_{z \rightarrow 0} \frac{|h(z)|}{|z|} \geq 1 + \varepsilon$$

כי

$$\underbrace{\frac{d_H(h(z), 0)}{d_H(z, 0)}}_{\geq 1+\varepsilon} \cdot \frac{|z|}{|h(z)|} \xrightarrow{z \rightarrow 0} 1$$

מצד שני,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{h(z)}{z} \right| = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{h(z) - h(0)}{z - 0} \right| = |h'(0)|$$

□

ולכן $|h'(0)| \geq 1 + \varepsilon > 1$