

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 25

5.6.11

$D = D(0, 1)$. דיברנו על הלמה של שוורץ: אם יש העתקה $f : D \rightarrow D$ הולומורפית, אז $f(0) = 0$ ואם $|f'(0)| \leq 1$, $|f(z)| \leq |z|$ מתקיים $\forall z \in D(0, 1)$. $f(z) = e^{i\theta} z$ יש שוויון אז $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ כאשר $|a| < 1$. ראינו שאוטומורפיזמים של D הם מבוסס $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ כאשר $|a| < 1$. נניח $f : D \rightarrow D$ הולומורפית. אזי $|f'(z)| \leq \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$, $\forall z \in D$. יש שוויון בנקודה אחת אז f אוטומורפיזם. בפרט אם $f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ עם $|a| < 1$ ואז

$$|f'(z)| = \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}$$

הוכחה. תהי $z_0 \in D$, F מעביר את D ל- D ו- $f(z_0) = w_0$. ניקח כעת פונקציה g שמעבירה את D ל- D ואת w_0 ל- 0 וניקח h שמעבירה את D ל- D שמעבירה את 0 ל- z_0 .

$$g(z) = \frac{z - w_0}{1 - \bar{w}_0 z}$$

$$h(z) = \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}$$

כעת $g \circ f \circ h : D \rightarrow D$ מתאפסת ב- 0 . מהלמה של שוורץ

$$\left| \frac{d}{dz} g(f(h(z))) \right|_{z=0} \leq 1$$

כלומר

$$|g'(w_0) f'(z_0) h'(0)| \leq 1$$

$$h'(z) = \frac{(1 + \bar{z}_0 z) - (z - z_0) \bar{z}_0}{(1 + \bar{z}_0 z)^2}$$

לכן $h'(0) = 1 - |z_0|^2$

$$g'(z) = \frac{(1 - \bar{w}_0 z) + (z - w_0) \bar{w}_0}{(1 - \bar{w}_0 z)^2}$$

$$g'(w_0) = \frac{1}{1 - |w_0|^2} \quad \text{ולכן,}$$

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1 - |f(z_0)|^2}{1 - |z_0|^2}$$

יש שוויון בנקודה z_0 אם ורק אם יש שוויון בלמה של שורץ עבור $g \circ f \circ h$ וזה אם ורק אם $g \circ f \circ h$ אוטומורפיזם וזה אם ורק אם f אוטומורפיזם. $\square$

כדי להבין את זה טוב יותר, נדבר על גיאומטריה היפרבולית

גיאומטריה היפרבולית – מודל הדיסק של Poincaré

כזכור אם $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ גזירה ברציפות למקוטעין אז $\text{Length}(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$

הגדרה. עבור $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ גזירה ברציפות למקוטעין נסמן

$$L_H(\gamma) = \int_a^b \frac{|\dot{\gamma}(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt$$

וזה נקרא אורך היפרבולי.

טענה. יהי $f : D \rightarrow D$ אוטומורפיזם. אזי $L_H(\gamma) L_H(f \circ \gamma)$ לכל $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ גזירה ברציפות למקוטעין.

הוכחה.

$$L_H(f \circ \gamma) = \int_a^b \frac{\left| \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \right|}{1 - |f(\gamma(t))|^2} dt = \int_a^b \frac{|f'(\gamma(t))|}{1 - |f(\gamma(t))|^2} dt$$

כזכור עבור f אוטומורפיזם $|f'(z)| = \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}$ ולכן

$$\int_a^b \frac{|f'(\gamma(t))|}{1 - |f(\gamma(t))|^2} dt = \int_a^b \frac{1}{1 - |\gamma(t)|^2} |\dot{\gamma}(t)| dt = L_H(\gamma)$$

$\square$

במישור האוקלידי, עם המטריקה האוקלידית רק סיבובים, שיקופים והזזות שומרות על אורך מסילה. כאן מצאנו גיאומטריה שחבורת ההעתקות השומרות על אורך מסילה היא חבורת העתקות מוביזם.

טענה. אם $f : D \rightarrow D$ הולומורפית, γ מסילה

$$L_H[f \circ \gamma] \leq L_H[\gamma]$$

הוכחה. כמו קודם, ההבדל היחיד הוא שמהלמה של Pick,

$$L_H(f \circ \gamma) = \int_a^b \frac{|f'(\gamma(t))|}{1 - |f(\gamma(t))|} |\dot{\gamma}(t)| dt \leq \int_a^b \frac{1}{1 - |\gamma(t)|^2} |\dot{\gamma}(t)| = L_H(\gamma)$$

□

הגדרה. עבור $a, b \in D$

$$d_H(a, b) = \inf\{L_H(\gamma) : \gamma[\alpha, \beta] \rightarrow D, \gamma(\alpha) = a, \gamma(\beta) = b\}$$

המרחק ההיפרבולי בין a ל- b .

הגדרה. אם קיים עקום γ בין a ל- b כך ש- $L_H(\gamma) = d_H(a, b)$ קוראים geodesic.

משפט. יש גיאודזי בין כל שתי נקודות, הוא יחיד. הוא תמיד מוכל במעגל/ישר שפוגש את ∂D בזווית ישרה.

כלומר מעגלים/ישרים שחותכים את ∂D בזווית ישרה – הם הישרים ההיפרבוליים (זה האנלוג לישרים במישור).

"בהינתן ישר היפרבולי ונקודה לא עליו, יכולים להיות המון ישרים היפרבוליים דרך הנקודה של חותכים את הישר (מקבילים)". הגיאומטריה הזאת מקיימת את 4 האקסיומות הראשונות של גיאומטריה אוקלידית וכמובן לא מקיימת את החמישית.

הוכחה. נניח קודם ש- $a = 0, b > 0$. נראה שהגאודזי הוא פשוט הקטע בין 0 ל- b . תהי γ עקומה כלשהי בין 0 ל- b . נסתכל על החלק הממשי שלה $\gamma_1(t) = \text{Re}(\gamma(t))$. נשים לב

$$|\dot{\gamma}_1(t)| \leq |\dot{\gamma}(t)|$$

$$|\gamma_1(t)| \leq |\gamma(t)|$$

ולכן

$$\frac{1}{1 - |\gamma_1(t)|^2} \leq \frac{1}{1 - |\gamma(t)|^2}$$

כעת,

$$L_H[\gamma] = \int_a^b \frac{|\dot{\gamma}(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt \geq \int_a^b \frac{|\dot{\gamma}_1(t)|}{1 - |\gamma_1(t)|^2} dt = L_H[\gamma_1]$$

יש שוויון אם ורק אם γ נמצאת תמיד על הישר הממשי, לכו כשמחפשים גאודזי מספיק להצטמצם לעקומים על הישר הממשי ושם כבר מובן שהאופטימום הוא בדיוק הקטע מ-0 ל- b .

במקרה הכללי, אוטומורפיזמים של D שומרים על אורך של עקומות ולכן מעבירים גאודזי לגאודזי. יש אוטומורפיזם שמעביר את a ל-0 ואת b לאיזשהו $\mathbb{R}_+$ ע"י

$$z \mapsto e^{-i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

והגאודזי בין a ל- b הוא התמונה של $\mathbb{R}$ תחת f , אבל f מביא את התמונה היא מעגל מוכלל, וכיוון שהעקמת מביא קונפורמיט את התמונה חותכת את ∂D בזוויות ישרות. □