

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 24

2.6.11

נמשיך לדבר על תחומים פשוטי קשר. תחום פשוט קשר הוא תחום בו כל מסילה סגורה אפשר לכווץ באופן רציף לנקודה, בלי לצאת מהתחום. ראינו:

1. f הולומורפית בתחום פשוט קשר G , $\gamma \subseteq G$ עקומה סגורה אז $\int_{\gamma} f = 0$.

2. לכל f הולומורפית בתחום פשוט קשר יש קדומה.

3. בפרט, אם G פשוט קשר, ו- $z_0 \notin G$ ו- $\gamma \subseteq G$ עקומה סגורה אז $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = 0$. כלומר, אין חורים ב- G , עקומה ב- G לא יכולה להקיף נקודה שאינה ב- G .

נראה מסקנות נוספות:

4. נניח G פשוט קשר, f הולומורפית ב- G ולא מתאפסת. אז קיים ענף של $\log f$, כלומר יש ψ הולומורפית עם $e^{\psi} = f$.

הוכחה. מחפשים ψ עם $\psi' = \frac{f'}{f}$. הפונקציה $\frac{f'}{f}$ הולומורפית ב- G כי f לא מתאפסת. אז יש לה קדומה ψ . נוסיף ל- ψ קבוע, כך שבאיזשהי נקודה $z_0 \in G$: $e^{\psi(z_0)} = f(z_0)$. נוכיח ש- $e^{\psi} = f(z)$ לכל $z \in G$. מספיק להראות שהנגזרת היא 0:

$$\frac{d}{dz}(e^{-\psi(z)} f(z)) = e^{-\psi(z)}(f'(z) - \psi'(z)f(z)) = 0$$

□

5. אם f לא מתאפסת ב- G תחום פשוט קשר והיא הולומורפית אז יש ענף של $\sqrt{f}$. זה פשוט $e^{0.5l(f)}$ כאשר l ענף של $\log$.

תרגיל. לכל פונקציה הרמונית בתחום פשוט קשר, יש צמוד הרמוני.

משפט. יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום. אז התנאים הבאים שקולים:

1. G פשוט קשר.

2. $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ קשיר.

3. לכל $\gamma \subseteq G$ סגורה, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus G$, $\text{ind}_{\gamma}(z_0) = 0$.

4. לכל f הולומורפית ב- G , $\gamma \subseteq G$ סגורה, $\int_{\gamma} f = 0$.

5. לכל f הולומורפית שלא מתאפסת, יש $\log f$ הולומורפית.

ראינו: (5), (4), (3) $\Rightarrow$ (1), הסברנו בקצרה למה הגיוני ש- (2) $\Rightarrow$ (3), ברור ש- (4) $\Rightarrow$ (3). החלק העיקרי של המשפט הוא (1) $\Rightarrow$ (2) אבל לא נראה את זה כי זאת הוכחה טופולוגית. לא נוכיח כאן הכל, אבל נראה למשל (3) $\Rightarrow$ (2) תחת ההנחה ש- G חסום:

הוכחה. $z \mapsto \text{ind}_\gamma(z)$ היא פונקציה רציפה ב- $\mathbb{C} \setminus G$ שמקבלת ערכים שלמים. עבור $|z| > R$ כך ש- $G \subseteq D(z_0, R)$ מתקיים $\text{ind}_\gamma(z) = 0$ מכיוון ש- $\mathbb{C} \setminus G$ קשיר, לכל $z \in \mathbb{C} \setminus G$, $\text{ind}_\gamma(z) = 0$. הפונקציה $z \mapsto \text{ind}_\gamma(z)$ קבועה ב- $\mathbb{C} \setminus G$ (כי רציפה ומקבלת ערכים שלמים, $\mathbb{C} \setminus G$ קשיר) היא מתאפס בנקודה מסויימת (בסביבה של אינסוף) לכן $\text{ind}_\gamma(z) = 0$ לכל $z \in \mathbb{C} \setminus G$. $\square$

פשטות קשר היא תכונה טופולוגית, כלומר:

למה. יהיו $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$ תחומים, $f: G_1 \rightarrow G_2$ רציפה, חח"ע ועל עם הופכית רציפה. אזי G_1 פשוט קשר $\Leftrightarrow G_2$ פשוט קשר.

הוכחה. נניח $\gamma \subseteq G_1$ עקומה סגורה. אז גם $f \circ \gamma$ עקומה סגורה. אם G_2 פשוט קשר אז $f \circ \gamma$ הומוטופית לנקודה אז (הומוטופיה) f^{-1} היא הומוטופיה של γ . $\square$

איך נראים תחומי פשוטי קשר שאינם במישור? השערת פואנקרה: יריעה סגורה תחת ממדית פשוטת קשר הומומורפית לספירה.

משפט. קושי נניח $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום פשוט קשר, $\gamma \subseteq G$ סגורה, $z_0 \in G \setminus \gamma$. f הומומורפית ב- G . אזי $\text{ind}_\gamma(z_0) \cdot f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz$

הוכחה. $\int_\gamma (z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$. רוצים להוכיח:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

נסמן, $F(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. צ"ל ש- $\int_\gamma F(z) dz = 0$. אבל היא לא דווקא הומומורפית כי יש לה סינגולריות ב- z_0 אך בברור היא הומומורפית מחוץ ל- z_0 . בנקודה z_0 :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

לכן זאת סינגולריות סילקיה ואם משנים את הערך של F בנקודה אחת, מקבלים פונקציה הומומורפית. $\square$

הלמה של שורץ וגיאומטריה היפרבולית

תזכורת. עקרון המקסימום

אם f הומומורפית בתחום חסום G ורציפה ב- $\overline{G}$, אז

$$\max_{z \in \overline{G}} f(z) = \max_{\partial G} |f(z)|$$

נחזק בעזרת משפט ההעתקה הפתוחה:

משפט. אם f הומומורפית ב- G , $z_0 \in G$ ו- $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ לכל $z \in G$ אז f קבועה.

הוכחה. אם f לא קבועה, אז $f(G)$ קבוצה פתוחה ומכילה דיסק סביב $f(z_0)$. בפרט, $f(G)$ מכילה נקודה מהצורה $(1 + \varepsilon)f(z_0)$ בסתירה לכך ש- $|f(z_0)|$ המקסימום. $\square$

משפט. הלמה של שוורץ

נסמן $D = D(0, 1)$. נניח $f : D \rightarrow D$ הולומורפית עם $f(0) = 0$. אזי לכל $z \in D$ קיים $|f(z)| \leq |z|$.

במילים אחרות, אם $f(0) = 0$

$$\forall z \in D |f(z)| < 1 \Rightarrow \forall z \in D |f(z)| \leq |z|$$

מקרה השוויון: נניח $f : D \rightarrow D$, $f(0) = 0$, ונניח שקיימת $z_0 \neq 0$ עם $|f(z_0)| = |z_0|$. אזי בהכרח $f(z) = e^{i\theta}$ עם $\theta \in [0, 2\pi]$.

הוכחה. נסמן $F(z) = \frac{f(z)}{z}$. אז

$$\lim_{z \rightarrow 0} F(z) = f'(0)$$

ולכן ב-0 יש סינגולריות סליקה ואחרי תיקון קל F הולומורפית ב- D . ניקח $r < 1$ ונפעיל את עקרון המקסימום ב- $D(0, r)$. מקבלים שלכל $z \in D(0, r)$

$$|f(z)| \leq \max_{|w|=r} |F(w)| = \max_{|w|=r} \left| \frac{f(w)}{w} \right| \leq \frac{1}{r}$$

כלומר לכל $r < 1$, $|z| < r$, $|F(z)| < \frac{1}{r} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 1$ ולכן לכל $z \in D(0, 1)$

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1 \Rightarrow |f(z)| \leq |z|$$

לגבי מקרה השוויון:

הוכחנו שלכל $z \in D(0, 1)$, $|F(z)| \leq 1$. נניח שיש $z_0 \neq 0$ עם $|f(z_0)| = |z_0|$. אז $|F(z_0)| = 1$. אז לכל $z \in D$, $|F(z_0)| \geq |F(z)|$ ומעקרון המקסימום F קבועה ומכיוון ש- $|F(z_0)| = 1$ אז $F(z) = e^{i\theta}$ עבור איזשהו $\theta \in [0, 2\pi]$. $\square$

הערות.

1. $f : D \rightarrow D$, $f(0) = 0$, בהכרח $|f'(0)| \leq 1$. למה? או $F(0) = f'(0)$ או $|f'(0)| = 1$ כדאי לחשוב מתי $|f'(0)| \leq \limsup_{z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1$.

2. rescale

$$|f(z) - a| \leq |z - a| \Rightarrow f(a) = a \text{ הולומורפית, } f : D(a, R) \rightarrow D(a, R)$$

מסקנה. נניח $f : D \rightarrow D$ הולומורפית, חח"ע ועל, $f(0) = 0$. אזי בהכרח קיים $\theta \in [0, 2\pi]$ כך ש- $f(z) = e^{i\theta} z$ לכל $z \in D$.

הוכחה. יודעים ש- $|f(z)| \leq |z|$ לכל $z \in D$. מצד שני $f^{-1} : D \rightarrow D$ (ממשפט הפונקציה ההפוכה) עם $f^{-1}(0) = 0$ ולכן $|f^{-1}(z)| \leq |z|$ לכל $z \in D$. ניקח $z_0 \neq 0$ אזי,

$$z_0 = \left| f^{-1}(f(z_0)) \right| \leq |f(z_0)| \leq |z_0|$$

ממקרה השוויון בלמה של שוורץ, לכל $z \in D$, $f(z) = e^{i\theta} z$. $\square$

להעתקה חח"ע ועל, והולומורפית מ- D ל- D נקרא אוטומורפיזם של D או העתקה קונפורמית על D .

משפט. תהי $f : D \rightarrow D$ העתקה קונפורמית על D . אזי קיימים $\theta \in [0, 2\pi]$, $|a| < 1$ ש-

$$\forall z \in D \quad f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

הוכחה. ניזכר שהעתקות $z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ מעבירות את D ל- D : רוצים להראות $|z| = 1$ גורר $|z-a| = |\bar{z}-\bar{a}| = |1-\bar{a}z|$.

נתון $f : D \rightarrow D$ אוטומורפיזם. אם $f(0) = 0$ הוכחנו כבר ש- $f(z) = e^{i\theta} z$. נסמן ב- $a = f^{-1}(0)$, $|a| < 1$. נגדיר $g(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ וההפוכה של $h = g^{-1}$ היא גם כן העתקה מביוס $h(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$, אז $h(0) = a$ ו- $f \circ h$ מעבירה את 0 ל-0 והיא אוטומורפיזם של D . לכן, $f \circ h(z) = e^{i\theta} z$ ואז $f(z) = e^{i\theta} g(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. $\square$

מסקנה. יהי $a \in D$. קיים יחיד אוטומורפיזם $f : D \rightarrow D$ כך ש- $f(a) = 0$, $f'(a) > 0$.

הוכחה. כל האוטומורפיזמים הם מהצורה $e^{i\theta} \frac{z-b}{1-\bar{b}z}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ כך ש- $f(a) = 0$. בנוסף, קיימת יחידה $\theta \in [0, 2\pi]$ כך ש- $e^{i\theta} f'(a) > 0$ (כי $f'(a) \neq 0$). $\square$

משפט. רימן יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ פשוט קשר שאינו כל $\mathbb{C}$. יהי $a \in G$. אזי קיימת יחידה העתקה הולומורפית $f : G \rightarrow D$ חח"ע ועל עם $f(a) = 0$, $f'(a) > 0$.

נוכיח את היחידות

הוכחה. נניח f, g שתי העתקות כנ"ל. ההעתקה $h = f \circ g^{-1}$ היא הולומורפית, חח"ע ועל מהדיסק לעצמו ו- $h(0) = 0$. $h'(0) = f'(g^{-1}(0)) \cdot (g^{-1})'(0) = \underbrace{f'(a)}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{1}{g'(a)}}_{>0} > 0$.

מצד שני קיימת יחידה $h : D \rightarrow D$ אוטומורפיזם עם $h(0) = 0$, $h'(0) > 0$. הזהות. לכן $f \circ g^{-1} = id$. $\square$

משפט. הלמה של פיק נניח $f : D \rightarrow D$ הולומורפית. אז $|f'(z)| \leq \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$ לכל $z \in D$.

איך זוכרים?

$$\left| \frac{df}{dz} \right| \leq \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$$

$$\frac{|df|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

הוכחה. נקבע $z_0 \in D$. אם $f(0) = 0$, $z_0 = 0$ מהלמה של שורץ $|f'(0)| \leq 1$. במקרה הכללי נשתמש בהעתקות מביוס ונעשה רדוקציה למקרה הנ"ל.

היינו רוצים להתחיל מ-0, למצוא העתקת מביוס g כך ש- $g(0) = z_0$. להפעיל העתקת מביוס f ולקבל $f(z_0)$ והעתקת מביוס נוספת h שתעביר את $f(z_0)$ ל-0 ושכל ההעתקות הללו יעבירו את D ל- D :

$$g(z) = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$$

$$h(z) = \frac{z - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}z}$$

נסמן $F(z) = h \circ f \circ g$ העתקה הולומורפית מ- D ל- D עם $F(0) = 0$. לכן מהלמה של שורץ $|F'(0)| \leq 1$.

$$F'(0) = \underbrace{h'(f(z_0))}_{\frac{1}{1-|f(z_0)|^2}} \cdot f'(z_0) \cdot \underbrace{g'(0)}_{1-|z_0|^2}$$

□