

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 22

29.5.11

אנחנו באמצע הוכחה של:

משפט. נניח $G = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ו- $\gamma_0 \sim_G \gamma_1$ אז $\text{ind}_{\gamma_0}(z_0) = \text{ind}_{\gamma_1}(z_0)$.

הוכחנו כבר שעבור γ_0, γ_1 שהן "קרובות ב- G " כאשר γ_0 ו- γ_1 קרובות ב- G אם יש חלוקה של $\beta = t_N < \dots < t_0 = \alpha$ ודיסקים פתוחים $D_0, \dots, D_{N-1} \subseteq G$ כך ש-
 $\gamma_1|_{[t_j, t_{j+1}]} \subseteq D_j, \gamma_0|_{[t_j, t_{j+1}]} \subseteq D_j$.

הוכחה. נתון ש- γ_0, γ_1 הולומורפיות ב- G . אזי קיימות $\{\gamma_s\}_{s \in [0,1]}$ רציפות ב- G כך ש-
 $0 = S_0 < \dots < S_T = 1$ היא פונקציה רציפה. מספיק להראות שיש חלוקה $\alpha = t_0 < \dots < t_N = \beta$ כך ש- γ_{s_j} קרובה ב- G ל- $\gamma_{s_{j+1}}$ עבור $j = 1, \dots, T-1$. אם נצלית, אז מהלמה שראינו קודם

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_{s_1}} f = \dots = \int_{\gamma_{s_n}} f = \int_{\gamma_1} f$$

למעשה, מספיק להראות שלכל $\tilde{s} \in [0, 1]$ יש סביבה $\delta > 0$ כך שאם $|s_1 - \tilde{s}| < \delta$ וגם $|s_2 - \tilde{s}| < \delta$ אז γ_{s_1} ו- γ_{s_2} קרובות ב- G . למה זה מספיק? מהינה בורל.
 נקבע $\tilde{s} \in [0, 1]$. קיימת חלוקה $\alpha = t_0 < \dots < t_N = \beta$ ודיסקים פתוחים $D_0, \dots, D_{N-1}$ כך ש- $\gamma_{\tilde{s}}([t_j, t_{j+1}]) \subseteq D_j \subseteq G$.
 נסמן את $0 < \varepsilon_j = \min_{t \in [t_j, t_{j+1}]} d(\gamma_{\tilde{s}}(t), \mathbb{C} \setminus D_j)$.

תזכורת. באופן כללי $d(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|$.

נסמן $\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1}\}$. מכך ש- $(s, t) \mapsto \gamma_s(t)$ רציפה על הקומפקט $[0, 1] \times [0, 1]$ אז $|\gamma_s(t_1) - \gamma_{s_2}(t_2)| < \varepsilon$ עתה אם $|s - \tilde{s}| < \delta > 0$ אז לכל $t \in [\alpha, \beta]$ מתקיים $|\gamma_s(t) - \gamma_{\tilde{s}}(t)| < \varepsilon$,
 לכן לכל $j = 0, \dots, N-1$ מתקיים $\gamma_s|_{[t_j, t_{j+1}]} \subseteq D_j$.
 $\square$

למשל $\text{ind}_{\gamma}(z)$ לא משתנה אם עושים הומוטופיה ב- $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, כי

$$\text{ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dw}{w - z}$$

משפט. ז'ורדן

נניח $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ עקום סגור ופשוט (כלומר, $\gamma|_{[a,b]}$ חח"ע). אזי ל- γ יש שני רכיבי ששירות בדיוק (ברכיב הלא חסום $\text{ind}_{\gamma}(z) = 0$).

לא נוכיח את זה.

הגדרה. תחום $G \subseteq \mathbb{C}$ נקרא פשוט קשר אם לכל עקומה סגורה $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ מתקיים ש- γ הומוטופית לעקומה קבועה.

דוגמאות.

1. $G \subseteq \mathbb{C}$ קמור. אזי G פשוט קשר. בהינתן $\gamma(t) : [a, b] \rightarrow G$ נסמן $\gamma_s(t) = (1-s)\gamma(t) + s\gamma(a)$. אז $\gamma_0(t) = t$ ו- $\gamma_1(t) = \gamma(a)$.

2. $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ הוא פשוט קשר. כמו בסעיף הקודם.

הערה. כאן מוגדר הענף הראשי של הלוגריתם.

הערה. לא קשה להוכיח שבהומוטופיה של מסילות סגורות לא חשוב לשמור על נקודת ההתחלה.

3. טבעת היא לא תחום פשוט קשר. ניקח γ מעגל סביב הטעת. $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \pm 2\pi i \neq 0$. ואילו היה הומוטופי לעקומה קבועה האינטגרל היה יוצא 0.

מסקנות. נניח G תחום פשוט קשר. אז:

1. לכל γ סגורה אם f הולמורפית ב- G אז $\int_{\gamma} f = 0$.

2. לכל פונקציה הולמורפית ב- G יש קדומה. הקדומה של f היא $F(z) = \int_{z_0 \rightsquigarrow z} f$ כאשר z_0 נקודה קבועה כלשהי ו- $z \rightsquigarrow z_0$ היא עקומה כלשהי בין z_0 ל- z . בגלל שהתחום הוא פשוט קשר $F(z) - F(w) = \int_{w \rightsquigarrow z} f$ ומראים כמו במסקנה של משפט Goursat ש- $\frac{F(w)-F(z)}{w-z} = \frac{1}{z-w} \int_{[z,w]} f \xrightarrow{w \rightarrow z} f(z)$.

3. אם G פשוט קשר, $z_0 \notin G$, γ עקומה סגורה ב- G אז $\text{ind}_{\gamma}(z) = 0$.

הסבר. $\frac{1}{z-z_0}$ הולמורפית ב- G לכן $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = 0$.

בעצם המסקנה האחרונה אומרת לנו ש"אין חורים" ב- G . אילו היה רכיב קשירות חסום ל- $G \setminus \{z_0\}$. היינו יכולים להקיף אותו עם עקומה ב- G ולקבל $\text{ind} \neq 0$.