

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 22

26.5.11

לוגריתמים וטופולוגיה

בשעיור הקודת ראינו למה:

למה. $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ רציפה, אז קיימת $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ כך ש- $e^{\psi(t)} = \varphi(t)$ לכל $t \in [a, b]$. יתר על כן, ψ יחידה עד כדי קבוע איזוטני.

ראינו מקרה פרטי חשוב: אם φ גזירה ברציפות למקוטעין:

$$\psi(t) = \int_a^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds + c$$

הגדרה. נניח $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה, f רציפה ולא מתאפסת על תמונת γ . מגדירים:

$$\Delta(\log f, \gamma) = \psi(b) - \psi(a)$$

$$\Delta(\arg f, \gamma) = \operatorname{Im}(\psi(b) - \psi(a))$$

כאשר $e^{\psi(t)} = f(\gamma(t))$ לכל $t \in [a, b]$. אם בנוסף γ סגורה ($\gamma(a) = \gamma(b)$) אז $\frac{\Delta(\log f, \gamma)}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$. מקרה פרטי חשוב: γ גזירה ברציפות למקוטעין, f הולומורפית בסביבת γ אז

$$\Delta(\log f, \gamma) = \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)}{f(\gamma(t))} dt = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

כדי להדגיש את החשיבות נכתוב שוב:

$$\Delta(\log f, \gamma) = \int_\gamma \frac{f'}{f}$$

כבר ראינו כזה בעקרון הארגומנט (מספר האפסים פחות מספר הקטבים).

הגדרה. נניח γ מסילה סגורה שלא עוברת דרך z_0 . מסמנים את מספר הליפוף (winding number):

$$\operatorname{ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \Delta(\log(z - z_0), \gamma)$$

דוגמאות.

1. אם γ אליפסה שמכילה את 0:

$$\text{ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \Delta(\log z, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \Delta(\arg z, \gamma) = 1$$

למעשה $\text{ind}_\gamma(z)$ סופר כמה פעמים מקיפים את z_0 נגד כיוון השעון (עם כיוון השעון – נספור עם מינוס).

אנחנו רוצים נוסחא למספר הליפוף, עבור γ גזירה ברציפות למקוטעין סגורה:

$$2\pi i \cdot \text{ind}_\gamma(z_0) = \Delta(\log(f), \gamma)$$

עבור $f(z) = z - z_0$ ולכן,

$$\text{ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz$$

מסקנות.

1. לפחות עבור עקומות גזירות למקוטעין, סגורות שלא עוברות ב- z_0 , האינדקס הוא אדיטיבי:

$$\text{ind}_{\gamma_1 + \gamma_2}(z_0) = \text{ind}_{\gamma_1}(z_0) + \text{ind}_{\gamma_2}(z_0)$$

2. ההעתקה $z \mapsto \text{ind}_\gamma(z)$ כאשר $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ החא רציפה (אם γ גזירה ברציפות למקוטעין).

$$\text{ind}_\gamma(z) = \int_\gamma \frac{dw}{w - z}$$

והאינטגרנד משתנה באופן רציף.

אם $\mathbb{C} \setminus \gamma = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_T$ איחוד זר של תחומים (פתוחים קשירים) אז $z \mapsto \text{ind}_\gamma(z)$ קבוע על Ω_j (כי פונקציה רציפה על תחום קשיר המקבלת ערכים שלמים).

3. אם $\gamma \subseteq D(0, R)$ ו- $|z_0| > R$ אז $\text{ind}_\gamma(z_0) = 0$. למשל כי

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = 0$$

כלומר, ברכיב הקשירות הלא חסום, מספר הליפוף הוא 0.

נוסחא נוספת: נניח γ סגורה, גזירה ברציפות למקוטעין.

$$\Delta(\log f, \gamma) = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

נעשה החלפת משתנים: $f(z) = w$.

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{f \circ \gamma} \frac{dw}{w} = 2\pi i \operatorname{ind}_{f \circ \gamma}(0)$$

ניזכר בעקרון הארגומנט: נניח f הולומורפית בתחום חסום G , רציפה ב- $\overline{G}$, לא מתאפסת בשפה.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} = \text{מספר האפסים ב-} G \text{ (כולל ריבוי)}$$

כאשר $\partial G = \gamma$
אבל גם:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} = \operatorname{ind}_{f \circ \gamma}(0)$$

אז למשל פולינום $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots$ ולוקחים $R \gg 1$ זה בערך כמו מעגל שמתלפף n פעמים, אז אנחנו מצפים ל- n אפסים בפנים.

הומוטופיה

הומוטופיה זה לשנות עקומה באופן רציף, צורך שמירה על נקודת ההתחלה והסיום.

הגדרה. יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום, $\gamma_0, \gamma_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow G$ עם $\gamma_0(\alpha) = \gamma_1(\alpha) = a$ ו- $\gamma_0(\beta) = \gamma_1(\beta) = b$. אומרים ש- γ_0 ו- γ_1 הומוטופיות זו לזו ב- G ומסמנים $\gamma_0 \sim_G \gamma_1$ אם קיימת פונקציה רציפה $\gamma : [0, 1] \times [\alpha, \beta] \rightarrow G$ כך ש- $\gamma(0, t) = \gamma_0(t)$, $\gamma(1, t) = \gamma_1(t)$ לכל $t \in [\alpha, \beta]$.
אולי עדיף לסמן $\gamma(s, t) = \gamma_s(t)$.

משפט. נניח $G = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ו- $\gamma_0 \sim_G \gamma_1$ אז $\operatorname{ind}_{\gamma_0}(z_0) = \operatorname{ind}_{\gamma_1}(z_0)$.

בעיה: עד כמה הגדרנו אינטגרל למסילות של C^1 למקוטעין. עכשיו נעבור להגדרה הכללית לכל עקומה רציפה. איך נגדיר אינטגרל על עקומה רציפה של פונקציה הולומורפית? מאחר מדי לסכומי רימן (כי יום הסטודנט היום) דרך: נניח $G \subseteq \mathbb{C}$ ו- $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית, אז יש לה קדומה $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ כך ש- $F' = f$. לכל עקומה גזירה ברציפות למקוטעין $\gamma \subseteq G$ ראינו:

$$\int_{\gamma} f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

מה היינו עושים לעקומה רציפה? היינו מגדירים סכומי רימן ומראים שיש שוויון. אבל אנחנו פשוט נגדיר: עבור $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ רציפה:

$$\int_{\gamma} f := F(\gamma(a)) - F(\gamma(b))$$

1. ההגדרה קונסיסטנטית עם ההגדרה במקרה שבו γ היא C^1 למקוטעין.

$$2. \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

הבעיה שזה לא עובד לתחום לא קמור. איך נגדיר את $\int_{\gamma} f$ אם לא ידוע תחום קמור שבו F הולומורפית ומכיל את γ ? נניח רק ש- f הולומורפית בסביבה של γ .

הגדרה. אינטגרל של פונקציה הולומורפית על עקומה רציפה. נניח $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ עקומה רציפה, f הולומורפית בתחום G שמכיל את γ . קיימת חלוקה $\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subseteq D_j$ כד ש- $D_0, \dots, D_{N-1} \subseteq G$ ודיסקים $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ לכל $j = 0, 1, \dots, N-1$ (מרציפות במ"ש או מהלמה של היינה בורל). תהי F_j קדומה של F ב- D_j (קיימת ויחידה עד כדי קבוע - D_j קמור). נגדיר:

$$\int_{\gamma} f = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}} f = \sum_{j=0}^{N-1} [F_j(\gamma(t_{j+1})) - F_j(\gamma(t_j))]$$

תכונות:

1. לא תלוי בחלוקה (עידון משותף + אדיטיביות).

$$2. \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

תרגיל. נניח γ עקומה סגורה, רציפה שלא עוברת דרך z_0 . הוכיחו כי

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \text{ind}_{\gamma}(z_0)$$

רצינו להראות שאם $\gamma_0 \sim_G \gamma_1$ אז

$$2\pi i \text{ind}_{\gamma}(z) = \int_{\gamma_0} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \text{ind}_{\gamma_1}(z_0)$$

נוכיח משהו כללי יותר:

משפט. נניח f הולומורפית ב- G ונניח $\gamma_0, \gamma_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow G$ אז:

$$\gamma_0 \sim_G \gamma_1 \Rightarrow \int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

למה. מסקנת המשפט נכונה תחת ההנחה הנוספת ש- γ_0, γ_1 "קרובות ב- G ". נאמר ש- $\gamma_0, \gamma_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow G$ קרובות ב- G , אם יש חלוקה $\alpha = t_0 < \dots < t_N = \beta$ ודיסקים $D_0, \dots, D_{N-1} \subseteq G$ כך ש-

$$\gamma_0([t_j, t_{j+1}]) \subseteq D_j$$

$$\gamma_1([t_j, t_{j+1}]) \subseteq D_j$$

באופן אינטואיטיבי - אותה חלוקה ואתם הדיסקים טובים לשתי העקומות.

הוכחה. בכל דיסק D_j יש פונקציה קדומה F_j שמקיימת $F_j' = f$. נשים לב שיש לנו חופש: אפשר להוסיף קבועים ל- F_j . נמצא את דרגת החופש באופן מושכל. נסמן $z_j = \gamma_0(t_j)$, $w_j = \gamma_1(t_j)$. נשים לב: $w_j, z_j \in D_j \cap D_{j-1}$. נבחר את הקבועים האדיטיביים כך ש-

$$1. F_1(z_1) = F_0(z_1)$$

2. נוסף קבוע ל- F_2 כך ש- $F_2(z_2) = F_1(z_2)$.

$\vdots$

קיבלנו ש- $F_j(z_j) = F_{j-1}(z_j)$ $j = 0, \dots, N-1$. נראה שבאופן אוטומטי גם $F_j(w_j) = F_{j-1}(w_j)$.

הסבר. $j = 1$: בתחום הקמור $D_0 \cap D_1$ יש שתי קדומות ל- f . גם $F'_0 = f$, $F_1 = f$. אז $F_0 - F_1 = \text{const}$ ב- $D_0 \cap D_1$. אבל בנקודה z_1 , $F_0(z_1) = F_1(z_1)$ ולכן $F_0 \equiv F_1$ ב- $D_0 \cap D_1$.

באותו אופן $F_j - F_{j-1}$ קבועה ב- $D_j \cap D_{j-1}$ ומתאפסת ב- z_j . לכן לכל $z \in D_j \cap D_{j-1}$ מתקיים $F_j(z) = F_{j-1}(z)$. מכיון ש- $w_j \in D_j \cap D_{j-1}$ אז בפרט $F_j(w_j) = F_{j-1}(w_j)$.
עתה,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} f &= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\gamma_0|_{[t_j, t_{j+1}]}} f = \sum_{j=0}^{N-1} [F_j(z_{j+1}) - F_j(z_j)] = \\ &= F_{N-1}(z_N) - F_0(z_0) = F_{N-1}(\gamma_0(t_N)) - F_0(\gamma_0(t_0)) \end{aligned}$$

ובאותו אופן

$$\int_{\gamma_1} f = \sum_{j=0}^{N-1} F_j(w_{j+1}) - F_j(w_j) = F_{N-1}(\gamma_1(t_N)) - F_0(\gamma_1(t_0))$$

אבל $\gamma_0(t_0) = \gamma_0(\alpha) = \gamma_1(t_0)$ ולכן $\gamma_0(t_N) = \gamma_1(t_N)$ ולכן $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$.

□