

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 21

22.5.11

תזכורת. אם f הולומורפית ב- $|z| > r$ אז $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ והשארית:

$$\operatorname{res}_{\infty} f = -a_1 = - \int_{|z|=R} f(z) dz$$

$$\operatorname{res}_{\infty} f = \operatorname{res}_{z=0} f \left(\frac{1}{z} \right) \cdot \frac{-1}{z^2}$$

שזה מקרה פרטי של:

$$\operatorname{res}_{g(a)} f = \operatorname{res}_{z=a} f(g(z)) g'(z)$$

כמו כן ראינו שאם f הולומורפית ב- $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ אז

$$\operatorname{res}_{\infty} f + \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} f = 0$$

כמו כן ראינו:

ל- f יש קוטב באינסוף

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty \Leftrightarrow$$

ל- f יש סינגולריות סליקה באינסוף, כלומר f הולומורפית באינסוף

$$\sup_{|z|>R} |f(z)| < \infty \Leftrightarrow$$

וכן,

אם f הולומורפית ב- $\mathbb{C}$ וקוטב באינסוף אז היא פולינום, ואם f מרומורפית ב- $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ אז f רציונלית.

מלוגריתמים לטופולוגיה

נשתמש בפונקציית הלוגריתם (שהוא בעייתי במרוכבים) כדי לפתח טופולוגיה. ראינו $\log z = \ln |z| + i \arg(z)$. הבעיה שהארגומנט מוגדר עד כדי 2π . ראינו שיש ענף של הלוגריתם בחצי מישור שהראשית בשפתו. מצד שני, ראינו שבטבעת סביב הראשית אין ענף של הלוגריתם.

למה. לוגריתם לאורך עקומה

ניח $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ עקומה רציפה, שלא עוברת דרך 0. אז קיימת $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ כך ש- $\varphi(t) = e^{\psi(t)}$ לכל $t \in [a, b]$. ψ כזאת היא יחידה, עד כדי הוספת קבוע שהוא כפולה שלמה של $2\pi i$.

הוכחה. יחידות: נניח ψ_1, ψ_2 כנ"ל, כלומר $e^{\psi_1} = e^{\psi_2} = \varphi$. לכן $e^{\psi_2 - \psi_1} = 1$.
 לכל $t \in [a, b]$ קיים $\frac{\psi_2(t) - \psi_1(t)}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$. מרציפות ψ_1, ψ_2 נובע ש- $\psi_2 - \psi_1$ קבועה.
 נתפל בקיום. מקרה קל ראשון: נניח $\varphi([a, b])$ מוכלת בחצי מישור שהראשית בשפתו. יש
 ענף $l(z)$ של לוגריתם, ואז נגדיר $\psi(z) = l(\varphi(z))$.
 מקרה קל שני: נניח φ גזירה ברציפות למקוטעין. למעשה צריך למצוא פונקציה שהנגזרת שלה
 היא הנגזרת הלוגריתמית שכבר ראינו. נגדיר $\psi(t) = \int_a^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds + c$ כך ש- $e^c = \varphi(a)$.
 למה זה עובד? נראה ש- $\frac{d}{dt}(e^{-\psi(t)}\varphi(t)) = 0$ ואמנם:

$$\frac{d}{dt}(e^{-\psi(t)}\varphi(t)) = e^{-\psi(t)}[\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi(t)] = 0$$

היות ו- $\psi'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$ לכל $t \in [a, b]$.
 מה נעשה במקרה הכללי? נתשמש בקומפקטיות. לכל $t \in [a, b]$ יש קטע פתוח I_t כך
 ש- $\varphi|_{I_t}$ מוכל בחצי מישור. נבחר תת כיסוי סופי $I_{t_1}, \dots, I_{t_n}$ כך ש- $[a, b] \subseteq \bigcup_{j=1}^n I_{t_j}$.
 בכל I_t יש פונקציה φ_t רציפה עם $e^{\varphi_t} = f$. איך נאחד אותם לפונקציה גלובלית? בחיתוך
 של שני קטעים למשל I_{t_1}, I_{t_2} , שתי הפונקציה הם לוגריתם של אותה פונקציה ולכן נבדלות
 בקבוע שהוא כפולה של $2\pi i$. נוסיף קבוע ל- ψ_{t_2} כך שתהיה קונסיסטנטית עם ψ_{t_1} . נתקן
 את ψ_{t_3} שתהיה קונסיסטנטית עם ψ_{t_2} . נמשיך עד שנתקן את כולן. כדי לעשות את זה
 נכון, אנחנו מניחים ש- I_{t_i} חותך רק את $I_{t_{i-1}}$ ו- $I_{t_{i+1}}$. ל- ψ_t מוסיפים קבוע כך שיהיה
 קונסיסטנטי עם $\psi_{t_{i-1}}$ ב- $I_{t_i} \cap I_{t_{i-1}}$. לבסוף הפונקציה $\psi(t) = \{\psi_{t_i}(x), x \in I_{t_i}\}$ חד
 ערכית ורציפה. $\square$

הגדרה. (הגידול של $\log f$ ביחס לעקומה γ)
 נניח $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ עקומה רציפה, f רציפה על γ ולא מתאפסת. אזי קיימת ψ רציפה כך ש-

$$\forall t \in [a, b] \quad e^{\psi(t)} = f(\gamma(t))$$

מסמנים:

$$\Delta(\log f, \gamma) = \psi(b) - \psi(a)$$

$$\Delta(\arg f, \gamma) = \text{Im}(\psi(b) - \psi(a))$$

והשניים האחרונים בכלל לא תלויים בבחירת ψ .

דוגמא. $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi, f(z) = z$.
 איזו פונקציה רציפה ψ מקיימת $e^{\psi(t)} = f(\gamma(t)) = e^{it}$? למשל it .

$$\Delta(\log z, \gamma) = i(2\pi) - i(0) = 2\pi i$$

$$\Delta(\arg z, \gamma) = 2\pi$$

אם היינו הופכים אוריינטציה היא יוצא -2π .

הערה. הדוגמא טיפוסית במובן שאם העקומה סגורה, תמיד נקבל כפולה של $2\pi i$. כלומר אם γ מקיימת $\gamma(a) = \gamma(b)$ אז $\frac{\Delta(f, \gamma)}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$. מדוע?

$$e^{\psi(b)} = f(\gamma(a)) = g(\gamma(b)) = e^{\psi(b)}$$

הגדרה. נניח $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ עקומה סגורה. מספר הליפוף (winding number) של γ סביב z_0 הוא:

$$\text{ind}_\gamma(z_0) = \frac{\Delta(\log(z - z_0), \gamma)}{2\pi i}$$

מהו המספר הזה? באופן אינטואיטיבי זה אומר כמה פעמים הקפנו את z_0 נגד כיוון השעון. נראה בשעיור הבא ש-

$$\text{ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$