

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 20

19.5.11

אנחנו ממשיכים עם נוסחאת קושי.

דוגמא. נניח של- f הולומורפית יש אפס מסדר m ב- z_0 .

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = m$$

נוודא זאת. אפשר לרשום את $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ כאשר g הולומורפית ולא מתאפסת בנקודה z_0 . לכן $f'(z) = m(z - z_0)^{m-1}g(z) + (z - z_0)^m g'(z)$ לכן עבור $z \neq z_0$:

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

אז

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f'}{f} = \operatorname{res} \left(\frac{m}{z - z_0} + \frac{g'}{g} \right) = \operatorname{res} \frac{m}{z - z_0} = m$$

באותו אופן אם ל- f יש קוטב מסדר m ב- z_0 אז

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f'}{f} = -m$$

עקרון הארגומנט

הגדרה. אומרים ש- f מרומורפית ב- G אם היא הולומורפית פרט למספר סופי של קטבים.

משפט. עקרון הארגומנט

נניח G תחום חסום, שפה חלקה למקוטעין. נניח f מרומורפית ב- G ורציפה ב- $\overline{G} \setminus \{\text{קטבים}\}$. נניח גם ש- $\forall z \in \partial G, f(z) \neq 0$ אז:

$$\int_{\partial G} \frac{f'}{f} = 2\pi i (Z_f(G) - P_f(G))$$

כאשר $Z_f(G)$ הוא מספר האפסים ב- G (כולל ריבוי) ו- $P_f(G)$ הוא מספר הקטבים ב- G (כולל ריבוי).

הוכחה. הנקודות הסינגולריות של $\frac{f'}{f}$ הם בדיוק האפסים הקטבים של f וחישבנו את השארית שם. $\square$

משפט. Rouché

נייח ש- f, g פונקציות הולומורפיות בתחום G , רציפות ב- $\overline{G}$. נייח ש- $\forall z \in \partial G: |f(z)| > |g(z)|$. אז $f(G) = z_g(G)$.

הוכחה. עבור $t \in [0, 1]$ נסמן

$$f_t = (1-t)f + tg$$

טענה. f_t הולומורפית ב- G , רציפה ב- $\overline{G}$ ומתקיים $f_t(z) \neq 0$ לכל $z \in \partial G$ וכל $0 \leq t \leq 1$.

הסבר.

$$|f_t| = |f - t(f - g)| \geq |f| - t|f - g| \geq |f| - |f - g| > 0$$

מעקרון הארגומנט

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'_t}{f_t} = Z_{f_t}(G)$$

כי מספר הקטבים הוא 0. נסמן:

$$0 \leq t \leq 1 \quad \varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'_t}{f_t}$$

טענה. φ פונקציה רציפה ב- $[0, 1]$.

הסבר. אינטגרל רציף ב- t .

קיבלנו פונקציה רציפה ב- $[0, 1]$ שמקבלת ערכים שלמים. ממשפט ערך הביניים היא קבועה ולכן $Z_f(G) = \varphi(0) = \varphi(1) = Z_g(G)$. $\square$

דוגמא. כמו שורשים יש ל- $p(z) = z^4 + 3z^2 + 1$ בעיגול $|z| < 2$? נמצא פונקציה "קרובה" ל- p שלה קל לחשב שורשים. ננסה $f(z) = z^4$. נראה ש- $|f(z) - p(z)| < |f(z)|$ עבור $|z| = 2$.

$$|(f - p)(z)| = |3z^2 + 1| \leq 3 \cdot 4 + 1 < 16 = |z|^4 = |f(z)|$$

לכן מספר השורשים של p בתחום שווה למספר השורשים של f בתחום ויוצא 4.

משפט. משפט ההעתקה הפתוחה

נייח $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום, f הולומורפית ב- G לא קבועה. אז f מעבירה קבוצות פתוחות לקבוצות פתוחות.

נראה שזה לא בכלל נכון במספרים ממשיים. $f(x) = x^2$. אבל $f((-1, 1)) = [0, 1]$.

הוכחה. תהי $U \subseteq G$ פתוחה וניקח $w_0 \in f(U)$. לכן קיים $z_0 \in U$ כך ש- $f(z_0) = w_0$. לפונקציה $f(z) - w_0$ יש לה אפס ב- w_0 מאיזשהו סדר m סופי (כי f לא קבועה). האפס הנ"ל מבודד, כלומר קיימת $\delta > 0$ כך ש- $|f(z) - w_0| > 0$ $\Rightarrow |z - z_0| = \delta$. נסמן ב- $\varepsilon = \min_{|z - z_0| = \delta} |f(z) - w_0| > 0$. נראה שהדיסק $D(w_0, \varepsilon)$ ניקח $w \in D(w_0, \varepsilon)$ אזי $|z - z_0| = \delta \Rightarrow$

$$\left| (f(z) - w) - (f(z) - w_0) \right| = |w - w_0| < \varepsilon \leq |f(z) - w_0|$$

ממשפט רושה מספר האפסים של $f(z) - w$ שווה לזה של $f(z) - w_0$ ולכן שונה מאפס, כי ל- $f(z) - w_0$ יש שורש אחד לפחות.
 כלומר $1 \leq Z_{f(z)-w_0}(D(z_0, \delta)) = Z_{f(z)-w}(D(z_0, \delta))$ לכן יש $z \in D(z_0, \delta)$ עם $f(z) = w$.
 $\square$

בתחילת הקורס ראינו שאם f הולומורפית, $const = |f|$ אז f קבועה. וזה למשל נובע ממשפט ההעתקה הפתוחה.

תרגיל.

1. $f'(z_0) \neq 0$ אז קיימת סביבה של z_0 שבה f חח"ע.

2. אם f חח"ע ב- G אז $f'(z_0) \neq 0$.

משפט. משפט הפונקציה ההפוכה

ניח $f: G \rightarrow \mathbb{C}$: הולומורפית וחח"ע. אזי גם f^{-1} הולומורפית ו- $(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}$.

הוכחה. $f(G)$ פתוחה וקשירה. $g = f^{-1}: f(G) \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה רציפה
 (כי פתוח $= f(g^{-1}(\text{פתוחה})) = f(\text{פתוחה}) = g^{-1}$).
 עתה, ניקח $w_0 \in f(G)$

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

* נובע מכך ש- $2 = f(z)$ רציף וחח"ע. $\square$

החלפת משתנים ושארים באינסוף

תזכורת.

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b (\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

טענה.

$$\int_{g(\gamma)} f(z) dz = \int_{\gamma} f(g(w)) g'(w) dw$$

כאשר g הולומורפית ב- G , $\gamma \subseteq G$ ו- f רציפה על $g(\gamma)$.

הסבר.

$$\int_{\gamma} f(g(w)) g'(w) dw = \int_a^b f(g(\gamma(t))) g'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

נסמן $\gamma_1(t) = g(\gamma(t))$:

$$\int_a^b f(g(\gamma(t))) g'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b f(\gamma_1(t)) \dot{\gamma}_1(t) dt = \int_{\gamma_1} f$$

שני דברים נעשה היום:

$$1. \operatorname{res}_{g(a)} f = \operatorname{res}_a (f \circ g) g'$$

2. שארית באינסוף (בספירת רימן).

נתחיל בשני.

נניח f הולמורפית ב- $\{z : |z| > R\}$. זה בערך כמו לחשוב על "סביבה מנוקבת של אינסוף". ממשפט לורן ל- f יש פיתוח לטור לורן:

$$\forall |z| > R \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

הגדרה.

$$\operatorname{res}_{\infty} f = -a_{-1}$$

טענה. לכל $r > R$,

$$-\int_{|z|=r} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{\infty} f$$

הערה. המינוס באינטגרל בא לסמן אוריינטציה עם כיוון השעון. עם באמת חושבים על זה כסביבה מנוקבת של אינסוף אז זה נשמע די הגיוני כדי לעקוב אחרי כלל "רגל ימין".

הוכחה. נגדיר $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n}$, הולמורפית בסביבה מנוקבת של 0. שינוי משתנים באינטגרל:

$$\int_{|z|=r} f(z) dz = \int_{z=\frac{1}{w}} f\left(\frac{1}{w}\right) \cdot \frac{-1}{w^2} dw$$

נוודא שהמינוס במקום:

$$0 \leq t \leq 2\pi \quad \gamma(t) = re^{it}$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{z}$$

$$\gamma_1(t) = \varphi(\gamma(t)) = \frac{1}{\gamma} e^{-it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

לכן,

$$-\int_{|z|=r} f(z) dz = -\int_{|w|=\frac{1}{r}} \frac{g(w)}{w^2} dw = -2\pi i \operatorname{res}_{w=0} \frac{g(w)}{w^2}$$

נכתוב $w^{-2}g(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n w^{-n-2}$ ואז $-2\pi i \operatorname{res}_{w=0} \frac{g(w)}{w^2} = -2\pi i a_{-1}$. □

מסקנה. נניח f הולמורפית ב- $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, נקודות סינגולריות. אזי

$$\left(\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} f \right) + \operatorname{res}_{\infty} f = 0$$

הוכחה. ניקח $R > \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{a_k} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z) dz = -\operatorname{res}_{\infty} f$$

□

דוגמא.

$$\int_{|z|=R} \frac{(z-a_1) \cdots (z-a_n)}{(z-b_1) \cdots (z-b_m)} dz$$

כאשר $m > n$ ו- $R > \max\{|a_1|, \dots, |a_n|, |b_1|, \dots, |b_m|\}$ אז,

$$\int_{|z|=R} \frac{(z-a_1) \cdots (z-a_n)}{(z-b_1) \cdots (z-b_m)} dz = -2\pi i \operatorname{res}_{\infty} f$$

נחשב את $\operatorname{res}_{\infty} f$. נשים לב ש- $f(z) = \frac{\prod_i (z-a_i)}{\prod_j (z-b_j)}$ אז $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ בה"כ g הולומורפית ב-0. נסמן $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ אז ל- g יש סינגולריות סליקה ב-0.

$$\operatorname{res}_{\infty} f = -\operatorname{res}_{w=0} \frac{g(w)}{w^2}$$

$g(0) = 0$ לכן ל- $\frac{g(w)}{w^2}$ יש קוטב פשוט ב-0 או נקודת סינגולריות סליקה, לכן

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{w=0} \frac{g(w)}{w^2} &= \lim_{w \rightarrow 0} w \frac{g(w)}{w^2} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{g(w)}{w} = \lim_{z=\frac{1}{w}} \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) z = \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z \cdot \prod_{i=1}^n (z-a_i)}{\prod_{j=1}^m (z-b_j)} = \begin{cases} 0 & m > n+1 \\ 1 & m = n+1 \end{cases} \end{aligned}$$

∞

נניח f הולומורפית ב- $|z| < R$ אזי $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. אומרים של- f יש סינגולריות סליקה ב- ∞ אם $a_n = 0$ לכל $n > 0$. באופן שקול ל- g יש סינגולריות סליקה ב-0. כלומר f סליקה באינסוף $\Leftrightarrow g$ סליקה ב-0.

משפט. משפט רימן ל- f סינגולריות סליקה ב- $\infty \Leftrightarrow$ קיימים $R, M > 0$ כך ש- $\forall |z| > R$ $|f(z)| < M$ (כלומר " f חסומה בסביבה מרוחקת של אינסוף").

משפט. ל- f יש קוטב מסדר m באינסוף אם ל- g יש קוטב מסדר m ב-0. באופן שקול

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^m a_n z^n$$

עם $a_m \neq 0$.

ל- g יש קוטב ב-0 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow 0} |g(z)| = \infty$

מסקנה. ל- f יש קוטב באינסוף אם ורק אם $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$

משפט.

1. נניח f הולמורפית ב- $\mathbb{C}$, קוטב באינסוף אז f פולינום.
2. נניח f מרומורפית ב- $\mathbb{C}$ (מספר סופי של קטבים) עם קוטב (או סליקה) באינסוף אז f היא פונקציה רציונלית.

הוכחה.

1. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ ב- $|z| > 0$. בנקודה 0 ל- f יש סינגולריות סליקה כלומר $a_n = 0 \forall n > 0$ ולכן

$$\forall z \quad f(z) = \sum_{n=0}^m a_n z^n$$

2. יהיו $b_1, \dots, b_n$ הקטבים ב- $\mathbb{C}$ של f מסדר $m_1, \dots, m_n$ נסמן

$$Q(z) = \prod_{i=1}^n (z - b_i)^{m_i}$$

אז ל- $f(z)Q(z)$ אין קטבים, היא הולמורפית ב- $\mathbb{C}$. נפעיל את הסעיף הראשון על $f(z)Q(z)$ ונקבל ש- $f(z)Q(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ עבור P, Q פולינומים.

למה ל- $f(z)Q(z)$ יש קוטב (או סליקה) באינסוף? יודעים ש-
 $f(z)Q(z) = \sum_{k=-\infty}^{S+T} d_k z^k$ ולכן $Q(z) = \sum_{k=0}^s c_k z^k$, $f(z) = \sum_{k=-\infty}^T a_k z^k$.
 ולכן סליקה או קוטב באינסוף.

□

לגבי הוכחת הנסוחא $\text{res}_{g(a)} f = \text{res}_a (f \circ g) g'$ אז היא נובעת משינוי משתנים באינטגרל:

$$\text{res}_a (f \circ g) g' = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\delta} f(g(z)) g'(z) dz$$

נציב $w = g(z)$ ואז

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\delta} f(g(z)) g'(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{g(|z-a|=\delta)} f(z) dz = \text{res}_a f$$