

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 2

24.02.11

ראינו שאם $a \in \mathbb{Z}$ אז ל- $z^n = a$ יש בדיוק n פתרונות שונים $a = re^{i\theta}$ הפתרונות:
 $k = 1, 2, 3, \dots$

$$z = r^{1/n} e^{i\frac{\theta}{n} + i2\pi \frac{k}{n}}$$

דיברנו על אלגברה, כעת נדבר על טופולוגיה.

הטופולוגיה של $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

הגדרה. מרחק $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ עבור $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

כעת $\mathbb{C}$ הוא מרחב מטרי.

תזכורת: מרחק מטרי:

1. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow d(z_1, z_2) = 0$

2. $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$

3. $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$

הגדרה. כדור פתוח (דיסק פתוח)

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| < r\}$$

הגדרה. קבוצה $U \subseteq \mathbb{C}$ נקראת פתוחה אם $\forall z \in U \exists r > 0, D(z, r) \subseteq U$.

דוגמאות.

1. $U = D(a, r)$ קבוצה פתוחה. ואכן $\forall z \in U, D(z, r - |z - a|) \subseteq U$

2. חצי המישור העליון $U = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ קבוצה פתוחה.

3. $(0, 1)$ אינה פתוחה למרות שהייתה פתוחה ב- $\mathbb{R}$.

הגדרה. גבול

תהי $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$, $L \in \mathbb{C}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L \iff |z_n - L| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

הגדרה. קבוצה $V \subseteq \mathbb{C}$ נקראת סגורה אם לכל סדרה מתכנסת $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subseteq V$ גם $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \in V$.

דוגמאות.

1. $D(a, r)$ לא סגורה.
 2. רק $\emptyset, \mathbb{C}$ הן קבוצות שגם פתוחות וגם סגורות.
 3. נסמן $\overline{D}(a, r) = \{z : |z - a| \leq r\}$ דיסק סגור. מן הסתם קבוצה סגורה.
 4. קטע סגור על הישר הוא קבוצה סגורה.
- טענה.** באופן כללי, קבוצה היא סגורה $\Leftrightarrow$ המשלים שלה פתוח.
- הגדרה.** קבוצה $U \subseteq \mathbb{C}$ נקראת חסומה אם קיים $R > 0$ כך ש- $U \subseteq D(0, R)$.
- הגדרה.** קבוצה סגורה וחסומה נקראת קומפקטית.

תכונות: אם $K \subseteq \mathbb{C}$ קומפקטית אזי:

1. לכל $K \subseteq \mathbb{C}$ יש ת"ס $\{z_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ שמתכנסת לאיזשהו איבר ב- K .
2. היינה-בורל: לכל כיסוי של K ע"י קבוצות פתוחות יש תת-כיסוי סופי.

דוגמאות.

1. כדור סגור.
2. כל $K \subseteq \mathbb{C}$ סופית.
3. $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

פונקציות

הגדרה. גבול של פונקציה:

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \text{Dom}(f) \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

גבול של פונקציה מוגדר לכל $f : X \rightarrow Y$ כאשר X, Y מרחבים מטריים. כמובן שהיינו יכולים להגדיר למרחב מטרי כללי אם היינו מחליפים $|\cdot|$ במרחק.

הגדרה. פונקציה רציפה ב- a אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

דוגמאות.

1. $f(z) = z$ רציפה.
2. $f(z) = \text{const}$ רציפה.
3. $f(z) = \bar{z}$ רציפה.

4. $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ סכום, כפל, הפרש, הרכבה של פונקציות רציפות רציף.
5. מנה של שתי פונקציות רציפות, רציפה בכל הנקודות בהן המכנה לא מתאפס.
6. $z^4 + 3z$ רציפה.
7. $\bar{z} \cdot \frac{2}{z^2+1}$ רציפה בכל מישור פרט ל- $z = \pm i$.
- הערה. כאשר רושמים $a > 0$ הכוונה היא ש- a ממשי וחיובי. למה לא מתייחסים לזה בדר"כ? כי אין סדר על מרוכבים!

תרגיל תזכורת:

אם $K \subseteq \mathbb{C}$ קומפקטי ו- $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה אז $f(K)$ קומפקטי.
אם $U \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה, f רציפה אז $f^{-1}(U)$ פתוחה.

קשירות

הגדרה. גרף $G = (V, E)$ יקרא קשיר אם לכל $v, w \in V$ קיים מסלול מ- v ל- w .
אמנם איחוד של שני כדורים פתוחים זרים הוא סה"כ קבוצה פתוחה אבל נוח להסתכל עליו כשני כדורים. זה בגלל שהקבוצה לא קשירה.

הגדרה. קטע הוא העתקה $\gamma : \underbrace{[a, b]}_{\subseteq \mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}$ מהצורה: $\gamma(t) = u + tv$, $t, v \in \mathbb{C}$.

למשל $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ $\gamma(t) = 1 + ti$

הגדרה. קו פוליגוני (לינארי למקוטעין) הוא העתקה $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ כך שקיימת חלוקה $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ כך ש- $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ היא קטע.

קו פוליגוני הוא העתקה רציפה. מ- $[a, b]$ ל- $\mathbb{C}$.

הגדרה. f תקרא קבועה מקומית בנקודה אם לכל $a \in G$ קיים $R > 0$ כך ש- $f|_{D(a, R)} = \text{const}$.

הגדרה. פונקציה f תקרא קבועה גלובלית אם $f = \text{const}$ לכל G .

משפט. הגדרות שקולות לקשירות: תהי $G \subseteq \mathbb{C}$ קבוצה פתוחה.

1. אם $X \subseteq G$ פתוחה וגם $G \setminus X$ פתוחה אז בהכרח $X = G$ או $X = \emptyset$. (כלומר, אי אפשר לפרק את G לשתי חתיכות פתוחות).

2. יהיו $a, b \in G$ אז קיים קו פוליגוני המוכל ב- G המתחיל ב- a ונגמר ב- b .

3. לכל פונקציה $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ קבועה מקומית, בהכרח f קבועה גלובלית.

4. כל פונקציה $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה מקיימת את תכונת ערך הביניים (אם מקבלת ערכים s ו- t אז מקבלת גם כל הערכים שביניהם).

הגדרה. קבוצה פתוחה המקיימת אחת התכונות הנ"ל נקראת קשירה.

הגדרה. קבוצה פתוחה וקשירה נקראת תחום.

תרגיל: נניח $U, V \subseteq \mathbb{C}$ פתוחות. $f : U \rightarrow V$ רציפה $f(U) = V$. צ"ל אם U קשירה אז V קשירה.

הוכחה.

$1 \Rightarrow 2$: נקבע $a \in G$. נסמן $\{z \in G : z \text{ ל-} a \text{ ב-} G \text{ פוליגונילי}\}$ אינה X . ריקה. למשל $a \in X$ ואפילו דיסק שלם סביב a נמצא ב- X .
 X פתוחה. נניח $z \in X$. כלומר יש קו פוליגונילי מ- a ל- z . G פתוחה אז יש $r > 0$ כך ש- $D(z, r) \subseteq X$. נטען ש- $D(z, R) \subseteq X$. למה? כי בהינתן $w \in D(z, r)$ ניקח קו שמחבר בין a ל- z ונוסיף לו את הקטע מ- z ל- w .
 $G \setminus X$ פתוחה. ניקח $z \in G \setminus X$. כמו קודם $D(z, r) \subseteq G$. נראה שהדיסק כולו מוכל ב- $G \setminus X$. אחרת, יש $w \in D(z, r)$ כך ש- $w \in X$. יש קו מ- a ל- w . נוסיף את הקטע מ- w ל- z ולכן יש קו פוליגונילי בין a ל- z ולכן $z \in X$ פתוחה.
לכן $X, X \setminus G$ פתוחות, X אינה ריקה ולכן $X = G$ כלומר יש קו פוליגונילי מכל נקודה לכל נקודה.

$2 \Rightarrow 3$: נתונה f קבועה מקומית. רוצים להוכיח שהיא קבועה. כלומר, רוצים להראות ש $f(a) = f(b), \forall a, b \in G$. תהייה $a, b \in G$. יהי $\gamma(t) \in [\alpha, \beta]$ קו פוליגונילי עם $\gamma(\alpha) = a, \gamma(\beta) = b$ קיים כזה מההנחה.
הרעיון יהי לעקוב אחרי f לאורך הקו. נסמן $g(t) = f(\gamma(t))$. זה טריק מאוד שימושי לקחת פונקציה ולהסתכל איך היא מתנהגת על מסילה.
הפונקציה g קבועה מקומית: לכל $t \in [\alpha, \beta]$ יש $\varepsilon > 0$ כך ש- $g|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon] \cap [\alpha, \beta]} = \text{const}$.
מדוע? כי זאת הייתה ההנחה ש- f קבועה מקומית ומרציפות γ .
רוצים להראות: $f(a) = g(\alpha) = g(\beta) = f(b)$. זו כבר בעיה חד ממדית: להראות שכל פונקציה $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ קבועה מקומית היא בהכרח קבועה גלובלית. איך נעשה את זה?
נסמן $t_* = \sup\{t \geq \alpha : g|_{[\alpha, t]} = g(\alpha)\}$.
 $g|_{[\alpha, x]} = g(\alpha)$ בהכרח t_* מהגדרת $\alpha < x < t_0$ לכל הסבר: $g(\alpha) = g|_{[\alpha, t_*]}$.
 $g(t_*) = g(\alpha)$ הסבר: g קבועה מקומית ב- t_* קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $g|_{[t_*-\varepsilon, t_*+\varepsilon] \cap [\alpha, \beta]} = \text{const}$.
מצד שני, $g|_{[\alpha, t_*]} = g(\alpha)$. מכיוון ש- $(t_*-\varepsilon, t_*+\varepsilon) \cap [\alpha, t_*) \neq \emptyset$ בהכרח $g(t_*) = g(\alpha)$.
נותר רק להראות $t_* = \beta$. הסבר: אחרת קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $g|_{(t_*, t_*+\varepsilon) \cap [\alpha, \beta]} = \text{const}$.
 $g(t_0) = g(\alpha)$. $g|_{[\alpha, t_*+\varepsilon]} = g(\alpha)$ בסתירה לכך ש- t_* הוא הסופרמום.

$3 \Rightarrow 1$: נניח $X \subseteq G$ פתוחה כך שגם $G \setminus X$ פתוחה. נסמן,

$$f(z) = \begin{cases} 1, & z \in X \\ 0, & z \in G \setminus X \end{cases}$$

זאת פונקציה קבועה מקומית (כי שתי הקבוצות פתוחות). מ-3 היא קבועה גלובלית. אם תמיד 0 אז $X = \emptyset$ ואם 1 אז $X = G$.

$2 \Rightarrow 4$: $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה. מקבלת את הערכים s ו- t . קיימים $a, b \in G$ כך ש-

$$f(a) = s \in \mathbb{R}$$

$$f(b) = t \in \mathbb{R}$$

ניקח קו פוליגונילי רציף עם $\gamma(\alpha) = a, \gamma(\beta) = b$. נסמן $g(x) = f(\gamma(x))$. רציפה כהרכבה של רציפות. כעת $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- $g(\alpha) = s$ ו- $g(\beta) = t$. ממשפט ערך הביניים g מקבלת כל מה שבין s ו- t ובפרט גם f .

$4 \Rightarrow 1$: תהי $X \subseteq G$ פתוחה כך שגם $G \setminus X$ פתוחה. אזי

$$f(z) = \begin{cases} 1, & z \in X \\ 0, & z \in G \setminus X \end{cases}$$

□ אזי f רציפה אך לא מקיימת את תכונת ערך הביניים אלא אם $X = G$ או $X = \emptyset$.

שאיפה לאינסוף

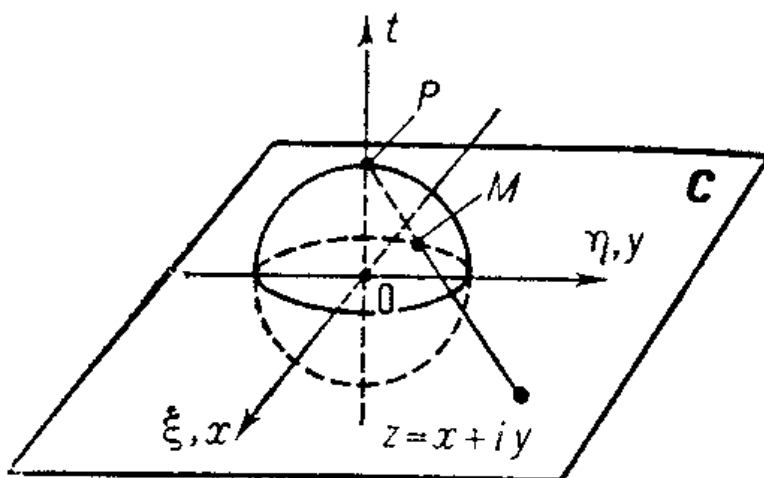
על $\mathbb{R}$ סדרה של נקודות הייתה יכולה לשאוף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$. במישור נראה לכאורה שיש המון המון דרכים לשאוף לאינסוף. עושים מה שתמיד עושים. שוכחים מכל זה ומגדירים מחדש:

הגדרה. תהי $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אומרים ש- $z_n \rightarrow \infty$ אם $|z_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

אפשר לחשוב על זה כסביבה של אינסוף – משלים של כדור.
נניח $f: U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ אומרים ש- $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ אם $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$.
כלומר, אם:

$$\forall M \exists \delta > 0 \forall z \in U \quad 0 < |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z)| > M$$

אחת הנקודות חשוב על שאיפה לאינסוף זה להדביק נקודות מאוד רחוקות. מכאן הטלה סטראוגרפית:



נזהה את $\mathbb{C}$ עם $\mathbb{R}^3$ עם $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ וכן נתבונן ב- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

עבור $z \in \mathbb{C}$ נביט בישר שמחבר את z ו- $(0, 0, 1)$ נסמן את הנקודה שבה הישר חותך את S (שאינה $(0, 0, 1)$) ב- $f(z)$.

פונקציה כזאת $f: \mathbb{C} \rightarrow S \setminus \{(0, 0, 1)\}$ נקראת הטלה סטראוגרפית. נוסחא:

$$f(z) = \frac{(2 \operatorname{Re} z, 2 \operatorname{Im} z, |z|^2 - 1)}{|z|^2 + 1}$$

ככל ש- z גדול יותר כך $f(z)$ יתקרב לקוטב הצפוני $(0, 0, 1)$.
 לאור ההטלה הסטראוגרפית מתבקש להוסיף נקודה מלאכותית ∞ ל- $\mathbb{C}$: $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
 $f(\infty) = (0, 0, 1)$ ממש מתבקש להוסיף את הקוטב הצפוני. אבל את מי ההעתקה תתאים לה? את אינסוף.