

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 19

15.5.11

השאלה של f ב- z_0 :
 נניח f הולומורפית בסביבה מנוקבת של z_0 , למשל $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$. אנחנו יודעים שיש
 טור לורן סביב z_0 : $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.
 נסמן: $\text{res}_{z_0} f = a_{-1}$. למעשה זה מה שנשאר כשלוקחים את האינטגרל של הפונקציה:

$$\text{res}_{z_0} f = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} f(z) dz$$

לכל $0 < \varepsilon < r$.

משפט. משפט קושי עם נקודות סינגולריות מבודדות
 יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום חסום, שפה חלקה לפקוטעין, $a_1, \dots, a_n \in G$. נניח f הולומורפית ב-
 $G \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ ורציפה ב- $\overline{G} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. אזי

$$\int_{\partial G} f = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}_{a_k} f$$

הוכחה. נעשה רדוקציה למשפט הקודם ע"י זה שנבודד את הנקודות האלה. נבחר $\varepsilon > 0$ כך
 ש- $D(a_i, \varepsilon)$ זרים זה לזה ומוכלים ב- G . נסמן $G_\varepsilon = G \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{D(a_i, \varepsilon)}$. הולומורפית
 ב- G_ε לכן:

$$0 = \int_{\partial G_\varepsilon} f = \int_{\partial G} f - \sum_{k=1}^n \int_{|z-a_k|=\varepsilon} f(z) dz = \int_{\partial G} f - 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}_{a_k} f$$

□

דוגמא. $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2(z+i)} - \frac{1}{2(z-i)}$, $\text{res}_i f = \frac{1}{2i}$, $\text{res}_{-i} f = -\frac{1}{2i}$. אז

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i [\text{res}_{z=i} f(z) + \text{res}_{z=-i} f(z)] = 0$$

חישוב מהיר של שארית:

0. $\text{res}_a f$ כאשר ל- f יש קוטב פשוט.

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

$$\text{res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$$

1. נניח f, g הולומורפיות ב- a , $f(a) \neq 0$, $g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$:

$$\operatorname{res}_a \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

ואכן,

$$\operatorname{res}_a \left(\frac{f}{g} \right) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{\frac{g(z)-g(a)}{z-a}} = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

2. f הולומורפית ב- a :

$$\operatorname{res}_a \left(\frac{f(z)}{(z-a)^m} \right) = \frac{f^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$$

ואכן,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$$

$$\frac{f(z)}{(z-a)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^{n-m}$$

אם לא מדובר במקרים הנ"ל נצטרך לחשב את טור לורן.

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z-1)} \quad \text{דוגמא.}$$

$$\operatorname{res}_{z=1} f = \frac{\cos 1}{1} = \cos 1$$

$$\operatorname{res}_{z=0} f = \frac{d}{dz} \left(\frac{\cos z}{z-1} \right) \Big|_{z=0} = \frac{-\sin(z-1) - \cos z}{(z-1)^2} \Big|_{z=0} = 1$$

דוגמאות לאינטגרלים שחישובם מפורשט בעזרת res

1)

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t) dt = -i \int_{|z|=1} f \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} \right) \frac{dz}{z}$$

לכל פונקציה רציפה f .

הסבר.

$$\int_{|z|=1} f \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} \right) \frac{dz}{z} = i \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t) \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)} dt$$

עם נבחר פרמטריזציה $z = \gamma(t) = e^{it}$.

דוגמא. $a > 1$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t} = -i \int_{|z|=1} \frac{1}{a + \frac{z+\frac{1}{z}}{2}} \frac{dz}{z} = -2i \int_{|z|=1} \frac{1}{az + z^2 + 1}$$

נחפש סינגולריות של $\frac{1}{z^2+2az+1}$:

$$z^2 + 2az + 1 = 0$$

לכן,

$$z = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4}}{2}$$

$$z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1} \in D(0, 1)$$

$$z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1} \notin D(0, 1)$$

$$\cdot \frac{1}{z^2+2az+1} = \left(\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2} \right) \cdot \frac{1}{z_1-z_2} \quad \text{לכן}$$

$$\int_{|z|=1} \frac{d}{z^2 + 2az + 1} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_1} f = 2\pi i \cdot \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi i}{2\sqrt{a^2 - 1}}$$

2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

כאשר $f(z)$ היא הולומורפית עם נקודות סינגולריות מבודדות (מספר סופי) בחצי המישור העליון (התחתון). נניח גם $f(z) = O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$ בחצי המישור, כלומר קיים R, M כך ש-
 $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}$ לכל $|z| > R$.
 דוגמאות לפונקציות כאלה:

$$\frac{e^{iz}}{1+z^6}, \quad \frac{1}{1+z^4}, \quad \frac{1}{1+z^2}$$

טענה.

$$\int_{-\infty}^{\infty} = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(a_k) > 0} \operatorname{res}_{a_k} f = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(a_k) < 0} \operatorname{res}_{a_k} f$$

הוכחה. במקרה של חצי המישור העליון נסגור את הישר למסילה סגורה ע"י חצי עיגול למעלה, ובמקרה של חצי מישור תחתון עם חצי עיגול למטה. נסמן את העקומה ב- C_R .
 ניקח R מספיק גדול כך שכל הנקודות הסינגולריות בחצי מישור העליון של f נמצאות בחצי העיגול.

$$\int_{-R}^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\text{Im}(a_k) > 0} \text{res}_{a_k} f$$

$$\int_{-R}^R f(x)dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

$$\int_{C_R} f(z)dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

מדוע?

$$\left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \leq \pi R \sup_{|z|=R} |f(z)| \leq \pi R \frac{M}{R^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

□

דוגמא.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^6} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^6} dx$$

נרצה להראות $\left| \frac{e^{iz}}{1+z^6} \right| \leq \frac{M}{|z|^2}$ כאשר $\text{Im}(z) > 0$. וזה נכון כי עבור $\text{Im}(z) > 0$, $|e^{iz}| \leq 1$.
איפה הקטבים של $\frac{e^{iz}}{1+z^6}$ בחצי המישור העליון? בדיוק שורשי יחידה מסדר 6.