

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 18

12.5.11

בשיעור הקודם התחלנו לדבר על טורי לורן: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.

$$R_2^{-1} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n}$$

$$R_1 = \limsup_{n \rightarrow -\infty} |a_n|^{1/n}$$

הטור מתכנס בהחלט ובמ"ש מקומית בטבעת (annulus) ההתכנסות:

$$\{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$$

מחוץ לסגור של טבעת ההתכנסות הטור מתבדר.
נדבר על טורים שממורכזים ב-0.

טענה. (שחזור מקומי של טור לורן)

ניח $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, טבעת ההתכנסות $\{z : R_1 < |z| < R_2\}$ אזי לכל $R_1 < r < R_2$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

הוכחה. הטור מתכנס במ"ש בכך קומפקט בטבעת ההתכנסות, בפרט ב- $\{z : |z| = r\}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \frac{z^m}{z^{n+1}} dz \stackrel{\text{במ"ש}}{=} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} z^{m(n+1)} dz}_{=0 \text{ אלא אם } m-(n+1)=-1} \end{aligned}$$

□

מסקנות.

1. אפשר לשחזר את מקדמי טור לורן מתוך מעגל אחד.
2. אם שני טורי לורן מזדהים על מעגל אז יש להם אותם המקדמים, הם שווים.

משפט. Laurent

ניח f הולומורפית בטבעת $\{z : R_1 < |z| < R_2\}$ אזי קיימים $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ כך ש-
 $\forall R_1 < |z| < R_2, \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = f(z)$

הוכחה. נבחר $r_1 < r_2$ כך ש- $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$. אזי f הולומורפית ב- $r_1 < |z| < r_2$
 רציפה בסגור. ממשפט קושי:

$$\forall r_1 < |z_0| < r_2 \quad f(z_0) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz}_{f^+} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz}_{f^-}$$

ראינו שכל אינטגרל קושי אפשר לכתוב כטור חזקות. אנחנו מצפים שכאן נוכל לקבל את
 המקדמים של טור לורן - את אלה של החזקות החיוביות מ- f^+ ואת אלה של החזקות
 השליליות מ- f^- .

השתמשנו בעובדה שאפשר לרשום את $\frac{1}{z - z_0}$ כטור חזקות בשני אופנים שונים:

$$\frac{1}{z - z_0} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0^n}{z^{n+1}} & |z| > |z_0| \\ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{z_0^n} & |z| < |z_0| \end{cases}$$

ההתכנסות היא נומרלית (במ"ש מקומית ובהחלט).

לכן: $r_1 < |z_0| < r_2$

$$f^+(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_2} f(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0^n}{z^{n+1}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} z_0^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_2} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

$$f^-(z_0) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{|z|=r_1} f(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{z_0^n} dz = -\sum_{n=1}^{\infty} z_0^{-n} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_1} \frac{f(z)}{z^{-n+1}} dz}_{a_{-n}}$$

לסיכום:

$$\forall r_1 < |z| < r_2 \quad (*) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

כאשר $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$ עבור $R_1 < r < R_2$.

□ זהות (*) נכונה לכל $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ ולכן תקפה לכל $R_1 < |z| < R_2$

הערה. מיחידות טור לורן ופיתוח לטור חזקות אם יש לפונקציה המשכה הולומורפית בתוך
 הדיסק הפנימי אז המקדמים השליליים של טור לורן יתאפסו ואם יש לה המשכה הולומורפית
 מחוץ לדיסק החיצוני אז המקדמים החיוביים יתאפסו.

דוגמא. נניח $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ מחזורית. נניח שאפשר להציג את f כ-

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|n|}} e^{int}$$

נגדיר $g(e^{it}) := f(t)$ מוגדר היטב כי הפונקציה מחזורית 2π .

$$g(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|n|}} (e^{it})^n$$

$$\forall |z| = 1 \quad g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|n|}} z^n$$

זה טור לורן. טבעת ההתכנסות שלו $\{z : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$. אפשר להמשיך את g באופן הולומורפי לטבעת הזאת.

המקרה המעניין של טורי לורן הוא $R_1 = 0$ כלומר טבעת ההתכנסות: $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < R_2\}$. למעשה זה כמעט דיסק שלם. נראה מה קורה עם הפונקציה בנקודה שבה הפונקציה לא מוגדרת בתוך הדיסק.

נקודות סינגולריות

הגדרה. נניח f הולומורפית בדיסק המנוקב $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ אומרים ש- z_0 היא נקודה סינגולרית מבודדת של f .

דוגמאות.

1. ל- $\frac{1}{z}$ יש סינגולריות ב-0.
2. ל- $\frac{1}{\sin z}$ יש סינגולריות מבודדות ב- $\{\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$.
3. ל- $\text{Log } z$ נקודות הסינגולריות אינן מבודדות (אנחנו לא נדבר על מקרים כאלה).

שלושה סוגים של סינגולריות:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

ב- $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$

הגדרה. אומרים ש- z_0 סליקה אם $a_n = 0$ לכל $n < 0$.

כלומר אם נסמן $f(z_0) = a_0$ אז f הולומורפית בכל הדיסק $D(z_0, r)$ ו- $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ טור חזקות. זאת לא באמת נקודת סינגולריות, פשוט טף אחד לא אמר לנו שהפונקציה הולומורפית גם בהן.

דוגמא. $\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. לכאורה יש לה נקודה סינגולרית ב- $z = 0$ אבל בטור לורן אין מקדמים שליליים והפונקציה הולומורפית בסביבה של 0.

הגדרה. אומרים של- f יש קוטב מסדר m בנקודה z_0 אם

$$\forall z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\} \quad f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

ו- $a_{-m} \neq 0$. כלומר יש רק מספר סופי של מקדמים שליליים. אם $m = 1$ אומרים שהקוטב פשוט.

דוגמא. ל- $\frac{1}{z}$ יש קוטב פשוט ב-0.

f הולומורפית בסביבה מנוקבת של 0. ל- f יש קוטב מסדר m אם ורק אם $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$ קיים וסופי. (זה נקרא בעוד כמה דקות).
או אם $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ כאשר g הולומורפית ב- z_0 ו- $g(z_0) \neq 0$ (וזה ברור).

דוגמא. ל- $\frac{1}{1 - \cos z}$ יש קוטב ב-0 מסדר שתיים.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{1 - \cos z} = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2}} = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \dots}{z^2}} = \frac{1}{1/2} \neq 0$$

אם ל- f יש אפס מסדר m אז ל- $\frac{1}{f}$ יש קוטב מסדר m .
נניח:

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

אז:

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{h(z)}{(z - z_0)^m}$$

כאשר $h(z) = \frac{1}{g(z)} \neq 0$ הולומורפית בסביבת z_0 .
להפך גם נכון.

הגדרה. אומרים של- f סינגולריות עיקרית ב- f אם $\{n < 0 : a_n \neq 0\} = \infty$.

אפשר לגלות את סוג הסינגולריות מהתמונה $f(D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\})$.
קריטריון לסליקה (של רימן):

נניח f הולומורפית וחסומה בסביבה מנוקבת של z_0 , אזי z_0 היא סינגולריות סליקה.
הערה. בממשיים $\sin \frac{1}{z}$ חסומה ליד 0 אבל יש שם סינגולריות.

הוכחה. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ עם טבעת התכנסות מהצורה $\{0 < |z - z_0| < r\}$.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$$

לכל $\varepsilon > 0$.

מכיוון ש- $|f| \leq M$ נקבל:

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\varepsilon \frac{M}{\varepsilon^{n+1}}$$

לכל $n \leq 1$ ולכל $0 < \varepsilon < r$:

$$|a_n| \leq \frac{M}{\varepsilon^n} = M\varepsilon^{-n} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$$

□

לכן $a_n = 0$ לכל $n \leq -1$.

הערה. שאלה למחשבה: הגדירו סינגולריות באינסוף וחשבו על הקשר בין תנאי רימן למשפט ליוביל.

קריטריון לקוטב: נניח f הולומורפית ב- $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. אזי ל- f יש קוטב ב- z_0 אם ורק אם $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.

הוכחה. $\Leftarrow$: $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ עם $m \geq 1$, $g(z_0) \neq 0$ לכן

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \frac{|g(z_0)|}{0} = \infty$$

$\Rightarrow$: נניח ש- $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$. יש $\varepsilon > 0$ כך ש- $f \neq 0$ ב- $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$. נסמן $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, g הולמורפית בסביבה מנוקבת של z_0 ,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$$

מקריטריון רימן ל- g יש רק סינגולריות סליקה ו- $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ $|z| < \varepsilon$.
ל- g יש אפס ב- z_0 , נסמן ב- m את הסדר שלו. אזי:

$$g(z) = (z-z_0)^m h(z)$$

h הולמורפית, לא מתאפסת בסביבת z_0 לכן

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m h(z)}$$

כאשר $\frac{1}{h(z)}$ הולמורפית שונה מ-0. לכן ל- f יש קוטב מסדר m .

□

מסקנה. יש מגוון מצומצם של דרכים בהן f יכולה לשאוף ל- ∞ ב- z_0 . רק כמו $\frac{c}{(z-z_0)^m}$ עבור m טבעי.

תרגיל. אם f הולמורפית, סינגולרית ב- $0 \leq |f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{z}}$ אז סליקה.

קריטריון לסינגולריות עיקרית Casorati — Weierstrass:
נניח ל- f יש סינגולריות עיקרית ב- z_0 . אז לכל $\varepsilon > 0$ $f(D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\})$ היא קבוצה צפופה ב- $\mathbb{C}$, כלומר הסגור שלה הוא כל $\mathbb{C}$.

דוגמא. דוגמא לסינגולריות עיקרית: $e^{1/z}$ או e^{1/z^2} :

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

התמונה של דיסק ברדיוס ε היא $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
שתי הפונקציות הנ"ל הולמורפיות ב- $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

הערה. הקריטריון הוא תנאי הכרחי ומספיק (באילומינציה).

$$\lim_{z \rightarrow 0} |f(z)| = \infty$$

כלומר $\forall M \exists \delta > 0 |z| < \delta \Rightarrow |f(z)| > M$ ואז $\mathbb{C} \setminus D(0, M) \subseteq f(D(0, \delta) \setminus \{0\})$.

הוכחה. נניח בשלילה שלא צפוף. אזי קיימת $w_0 \in \mathbb{C}$ ו- $\varepsilon, \delta > 0$ כך ש-

$$\forall |z - z_0| < \varepsilon \quad |f(z) - w_0| > \delta$$

נביט ב- $g(z) = \frac{1}{f(z)-w_0}$ הולומרפית ב- $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$ וחסומה ע"י $1/\delta$ אז למעשה אין סינגולריות ב- z_0 , אפשר להוסיף את z_0 לתחום ההגדרה, g הולומרפית ב- $D(z_0, \varepsilon)$.

$$f(z) = w_0 + \frac{1}{g(z)}$$

אם $g(z_0) \neq 0$ אז f הולומרפית ב- z_0 . ל- g יש אפס מסדר m אז $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| + \infty$ ויש קוטב ב- z_0 .
□

הקריטריון אינו הדוק. למעשה יש את

משפט. Picard

אם ל- f יש סינגולריות עיקרית ב- z_0 לכל $\varepsilon > 0$

$$\#(\mathbb{C} \setminus f(D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\})) \leq 1$$

לא נוכיח אותו.

מה המקדם החשוב של טור לורן?

$$\int_{|z|=1} z^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

הגדרה. למקדם $(z - z_0)^{-1}$ בטור לורן סביב z_0 קוראים השארית של f ב- z_0 ומסמנים $\text{res}_{z_0} f$.

אם $\text{res}_{z_0} f = 0$ אז z_0 הולומרפית ב- z_0 .
נניח ש- f הולומרפית ב- $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

$$\forall 0 < \varepsilon < r \quad \int_{|z-z_0|=\varepsilon} f(z) dz = 2\pi i \text{res}_{z_0} f$$

הסבר. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ לכן

$$\int_{|z|=\varepsilon} f(z) dz = \int_{|z|=\varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{|z|=\varepsilon} z^n dz = 2\pi i a_{-1}$$