

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 17

8.5.11

בשבוע שעבר ראינו גרסה כללית של נוסחאת קושי:
נניח $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום חסום, שפה חלקה למקוטעין, f הולמורפית ב- G , רציפה ב- $\overline{G}$. אזי:

$$\forall z_0 \in G \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

והאוריינטציה של ∂G היא כך ש- G משמאלנו.
ראינו גם את המשפט הבא:

משפט. Morera

נניח G תחום, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה, אזי f הולמורפית $\Leftrightarrow$ לכל משולש $T \subseteq G$:
 $\int_{\partial T} f = 0$

חשוב לא להתבלבל: עם לא כל הפנים של המשולש בתוך התחום זה לא נכון.
מה שמעניין במשפטים האלה הוא שהם מדברים על נגזרות בעזרת אינטגרלים. וזה אופייני לפונקציות מרוכבות.

משפט. יהי G תחום ונניח $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ סדרת פונקציות פונקציות הולמורפיות המתכנסות במ"ש מקומית לפונקציה גבולית f . אזי:

1. f הולמורפית.

2. לכל k , $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ במ"ש מקומית.

זה לא נכון בפונקציות ממשיות: יש סדרת פולינומים ב- $[0, 1]$ שמתכנסת במ"ש לפונקציה רציפה שאינה גזירה באף נקודה.

הוכחה.

1. f רציפה כי גבול במ"ש מקומית של רציפות. ניקח משולש $T \subseteq G$ משולש, השפה שלו קבוצה קומפקטית, לכן $f_n \rightarrow f$ במ"ש על ∂T .

$$\int_{\partial T} f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\partial T} f$$

כי ההתכנסות היא במ"ש. מצד שני $\int_{\partial T} f_n = 0$ כי f_n הולמורפיות ולכן $\int_{\partial T} f = 0$ ולכן f הולמורפית.

2. תהי $z_0 \in G$. יש דיסק $\overline{D(z_0, 2R)} \subseteq G$. נוכיח שיש התכנסות של $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ במ"ש ב- $D(z_0, R)$.

ניקח $z \in D(z_0, R)$. ממשפט קושי:

$$f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, 2R)} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w - z)^{k+1}} dw$$

נחסום:

$$\begin{aligned} |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| &\leq \frac{k!}{2\pi i} \text{Length}(\partial D(z_0, 2R)) \cdot \sup_{|w - z_0| = 2R} \frac{|f_n(w) - f(w)|}{|w - z|^{k+1}} \leq \\ &\leq \underbrace{\frac{k!}{2\pi i} 4\pi R \frac{1}{(2R)^{k+1}}}_{=c(k, R)} \cdot \sup_{|w - z_0| = 2R} |f_n(w) - f(w)| \end{aligned}$$

זה נכון לכל z ולכן:

$$\sup_{z \in D(z_0, R)} |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq c(k, R) \sup_{|w - z_0| = 2R} |f_n(w) - f(w)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

דוגמאות חשובות של התכנסות במ"ש

נקבע $a \in \mathbb{C}$.

1.

$$\frac{1}{z - a} = \frac{-1}{a} \cdot \frac{1}{1 - (z/a)} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}$$

במ"ש מקומית ובהחלט ב- $\{z \in \mathbb{C} : |z| < |a|\}$. זה טור חזקות.

2. זאת פונקציה חשובה וחבל שתהיה לנו רק התכנסות בתחום הזה. אפשר לעשות מניפולציה דומה לקבל טור שמתכנס בתחום המשלים:

$$\frac{1}{z - a} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - a/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{z^n}$$

וזה מתכנס במ"ש מקומית ובהחלט ב- $\{z : |z| > |a|\}$. זה טור חזקות ב- $\frac{1}{z}$. לזה עוד מעט נקרא טור לורן (Laurent).

טורי לורן

הגדרה. טור מהצורה

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

נקרא טור Laurent.

דוגמא. $z_0 = 0$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-3}}{z^3} + \dots$$

נוח לחשוב על זה אם נפצל את $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ לשתי חתיכות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$.
אומרים שטור Laurent מתכנס אם שני החלקים שלו מתכנסים.
רדיוסי התכנסות: לרדיוס ההתכנסות של החלק החיובי נקרא R_2 , כלומר

$$\frac{1}{R_2} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$$

תחום ההתכנסות של החלק השני הוא המשלים של הדיסק הזה (רואים את זה בעזרת הצבה $w = \frac{1}{z}$ ואז

$$R_1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{-n}|^{1/n}$$

תרגיל. הטור $\sum_{n=-\infty}^i n f t y a_n z^n$ מתכנס מקומית במ"ש ובהחלט בטבעת $\{z : R_1 < |z| < R_2\}$.
אם הנקודה $z \notin \{w : R_1 < |w| < R_2\}$ אז הטור מתבדר.

מסקנה. טור לורן הולומורפי בטבעת ההתכנסות שלו. אם $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ בטבעת אז $f^{(k)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n z^{n-k}$.

הסבר. טור לורן מתכנס במ"ש מקומית ואיבריו פונקציות הולומורפיות, ממשפט ויירשטרס הוא הולומורפי בטבעת וניתן להחליף בין גבול לנגזרת.

איך משחזרים את מקדמי טור לורן?

טענה. נייח $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, טבעת התכנסות $\{z : R_1 < |z| < R_2\}$ אזי לכל $R_1 < r < R_2$:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$