

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 16

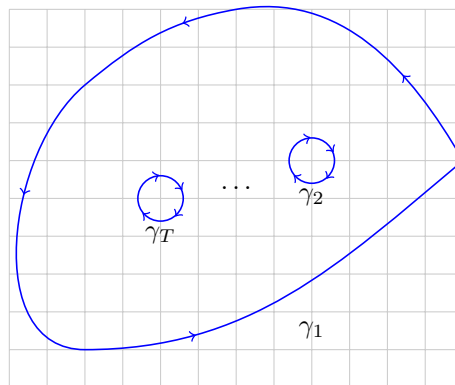
5.5.11

G תחום חסום עם שפה רגולרית: $\partial G = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_T$, γ_j מסילה סגורה, גזירה ברציפות למקוטעין.

משפט. משפט קושי

אם $f \in \text{Hol}(G) \cap C(\overline{G})$ אז $\int_{\partial G} f(z) dz = 0$.

הוכחה. נסמן ב- γ_1 :



נצייר רשת ריבועית עם צלע $\delta > 0$. נתבונן בכל הריבועים שחתכו את γ_1 , נסמן $A = \{Q_1, \dots, Q_m\}$.

טענה. $m \leq 10 \left(\frac{\text{Length}(\gamma_1)}{\delta} + 1 \right)$.

הוכחה. נתבונן בתת קבוצה מקסימלית $A' \subseteq A$ כך ש- $\overline{Q_j} \cap \overline{Q_k} = \emptyset$. ואז $\#A' \leq 9\#A$. מדוע? הריבועים של A נמצאים ב"מרחק" 1 לכל היותר מריבוע שנמצא ב- A' , אחרת היינו יכולים להוסיף אותו ל- A' , בסתירה למקסימליות. נתבונן ב- $A' = \{Q'_1, \dots, Q'_k\}$. נגדיר עליה מבנה של גרף ש- A' קבוצת הקודקודים ושני קודקודים מחוברים אם יש מקטע של המסילה γ_1 שמחבר ביניהם בלי לחתוך אף ריבוע אחר בדרך.

הגרף קשיר – המסילה γ_1 רציפה ולכן בין כל שני ריבועים מ- A' יש שרשרת סופית של מקטעי המסילה שלא חותכים אף ריבוע ביניהם.

לכן מספר הקשתות $\leq \#A' - 1$.

$$\text{Length}(\gamma_1) \geq \sum \text{קשתות} \geq \# \text{קשתות} \cdot \delta \geq \delta(\#A' - 1) \geq \delta \left(\frac{\#A}{9} - 1 \right)$$

כאשר קשת היא החלק של הקשת שנמצא מחוץ לריבועי A' . אורך כל קשת $\leq \delta$. ולכן,

$$\#A \leq \frac{9 \text{Length}(\gamma_1)}{\delta} + 1$$

□

טענה. נסמן $\Omega_j = G \cap Q_j$ כאשר Q_j קבוצת כל הריבועים שחותכים את ∂G (הפעם מתחשבים בכל מרכיבי השפה $(\gamma_1, \dots, \gamma_T)$ אז $\int_{\partial G} f dz = \sum_j \int_{\partial \Omega_j} f dz$

הוכחה. בבכל ריבוע $Q \subseteq G$ מתוך הרשת כך ש- $\bar{Q} \cap \partial G = \emptyset$ אז $\int_{\partial Q} f(z) dz = 0$ מדוע? כי f הולמורפית בסיביבת $\bar{Q}$ ו- Q קבוצה קמורה.

$$\int_{\partial G} f(z) dz = \sum_{\text{ריבועים פנימיים}} \int_{\partial Q} f(z) dz + \sum_j \int_{\partial \Omega_j} f(z) dz$$

והשוויון הוא מהסביבה הבאה: כל קטע מהרשת יופיע פעמיים עם אוריינטציות הפוכות. כל אלמנט שפה ייכנס בדיוק עם אחת עם האוריינטציה הנכונה כחלק משפת Ω_j . (בשביל להמנע ממצב שבו קטע של הרשת מוכל בחלק מהשפה ∂G , לפני הכל עושים הזזה גרית של הרשת). לכן,

$$\int_{\partial G} f(z) dz = \sum_j \int_{\partial \Omega_j} f(z) dz$$

□

טענה.

$$\left| \int_{\Omega_j} f(z) \right| \leq \varepsilon [4\delta + \text{Length}(\partial \Omega_j)]$$

כאשר ε, δ הם כך ש- $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon \Rightarrow |z_1 - z_2| < \delta$. אפשרי כי $\bar{G}$ קומפקטית, f רציפה ולכן רציפה במ"ש.

הוכחה. נבחר z_j מרכז הרבוע Q_j $(\Omega_j = G \cap Q_j)$:

$$\int_{\partial \Omega_j} f(z) dz = \int_{\partial \Omega_j} [f(z) - f(z_j)] dz + \underbrace{\int_{\partial \Omega_j} f(z_j) dz}_{=0}$$

לכן,

$$\left| \int_{\partial \Omega_j} f(z) \right| \leq \max_{\partial \Omega_j} |f(z) - f(z_j)| \cdot \text{Length}(\partial \Omega_j) \leq \varepsilon (4\delta + \text{Length}(\tilde{\gamma}_j))$$

כאשר 4δ הוא האכיב של $\partial \Omega_j$ שמגיע מהרשת ו- $\tilde{\gamma}_j$ החלק של $\partial \Omega$ שמגיע מ- ∂G . נסכם:

$$\left| \int_{\partial G} f(z) dz \right| = \left| \sum \int_{\partial \Omega_j} f(z) dz \right| \leq \sum_{j=1}^N \varepsilon (4\delta + L(\tilde{\gamma}_j))$$

כאשר N הוא מספר ה- Ω_j .

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \varepsilon(4\delta + L(\tilde{\gamma}_j)) &= \varepsilon(4\delta N + \text{Length}(\partial G)) = \varepsilon(4\delta N + \text{Length}(\partial G)) \leq \\ &\leq \varepsilon(36 \text{Length}(\partial G) + 36\delta T + \text{Length}(\partial G)) \leq \varepsilon 1000 \text{Length}(\partial G) T \end{aligned}$$

זה נכון לכל ε ולכן $\int_{\partial G} f(z) dz = 0$.
החסמים הם:

$$9 \left(\frac{\text{Length}(\gamma_i)}{\delta} + 1 \right) \geq \gamma_i \text{ שחותכות את } \Omega$$

ובסה"כ מספר ה- Ω :

$$N \leq 9 \left(\frac{\text{Length}(\partial G)}{\delta} + T \right)$$

□

כאשר T הוא מספר המסילות בשפת G .

□

עוד מסקנות ממשפט קושי.

משפט. עקרון המקסימום

G תחום חסוי, שפה רגולרית, $f \in \text{Hol}(G) \cap C(\overline{G})$. אז

$$\max_{z \in \overline{G}} |f(z)| = \max_{z \in \partial G} |f(z)|$$

ואם קיימת נקודה פנימית $z_0 \in G$ כך ש- $|f(z_0)| = \max_{\overline{G}} |f|$ אז f קבועה.

הוכחה.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

לכן,

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \text{Length}(\partial G) \max_{\zeta \in \partial G} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \text{Length}(\partial G) \frac{\max_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|}{\text{dist}(z_0, \partial G)} = \frac{\text{Length}(\partial G)}{2\pi \text{dist}(z_0, \partial G)} \cdot \max_{\partial G} |f| \end{aligned}$$

לכן, לכל $n \in \mathbb{N}$ f^n פונקציה הולומורפית ב- G , רציפה עד השפה ואז

$$|f^n(z_0)| \leq \underbrace{\frac{L(\partial G)}{2\pi \text{dist}(z_0, \partial G)}}_{=:c} \max_{\partial G} |f|^n$$

לכן לכל n נכון:

$$|f(z_0)| \leq \underbrace{c^{1/n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1} \max_{\partial G} |f|$$

לכן

$$|f(z_0)| \leq \max_{\partial G} |f|$$

וזה לכל $z_0 \in G$ ולכן

$$\max_{\overline{G}} |f| \leq \max_{\partial G} |f|$$

□

החלק השני – תרגיל.

הערה. עקרון המקסימום לא נכון לתחומים לא חסומים. למשל $f(z) = \sin z$ בחצי המישור העליון. $z \in \mathbb{R}, |f(z)| = 1$.

אפליקציה: המשפט היסודי של האלגברה (שוב)

הוכחה. יהי $p(z)$ פולינום, $|z| \rightarrow +\infty \rightarrow |p(z)| \rightarrow +\infty$, נניח בשלילה ש- $\frac{1}{p(z)} \rightarrow 0$ לכן $p(z) \neq 0$ נבחר רדיוס R כך ש-

$$\left| \frac{1}{p(z)} \right| < \left| \frac{1}{p(0)} \right|$$

עבור $|z| = R$
ואז עבור $G = D_R$

$$\max_{z \in D_R} \left| \frac{1}{p(z)} \right| \geq \left| \frac{1}{p(0)} \right| > \max_{z \in \partial D_R} \left| \frac{1}{p(z)} \right|$$

□

בסתירה לעקרון המקסימום.

משפט. Morera

G תחום, f רציפה ב- G ולכל משולש $T \subseteq G$ אז $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$ אז f הולומורפית ב- G .

הוכחה. הולומורפיות היא תנאי מקומי לכל $z_0 \in G$. נבחר דיסק $\overline{D(z_0, r)} \subseteq G$. בתוך הדיסק (קבוצה קמורה) יש ל- f פונקציה קדומה (בגלל תנאי המשולשים).
ראינו: $F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta$ פונקציה קדומה ולכן $f = F'$ הולומורפית בדיסק בפרט ב- z_0 .
□

מסקנה. יהי G תחום, $I \subseteq G$ קטע סגור. אם $f \in C(G) \cap \text{Hol}(G \setminus I)$ אז $f \in \text{Hol}(G)$.

הוכחה. נבחר משולש T ונראה ש- $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$.

מקרה 1: אם $I \cap T = \emptyset$ אז $f \in \text{Hol}(T) \cap C(T)$ ולכן $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$.

מקרה 2: אחרת.

נחלק את המשולש לשני חלקים $T_1 \cup S_1$ לפי הקטע I (או המשכו) T_1 הוא המשולש, S_1 הוא

המרובע. ואז $\int_{\partial T_1} f(z) dz = 0$ וכן $\int_{\partial S_1} f(z) dz = 0$.

$f \in C(\overline{S_1}) \cap \text{Hol}(S_1)$, $f \in C(\overline{T_1}) \cap \text{Hol}(T_1)$

לכן $\int_{\partial T} f(z) dz = \int_{\partial T_1} f(z) dz + \int_{\partial S_1} f(z) dz = 0$.

לכן לפי משפט Morera הולומורפית.

□

הערה. משפט קושי שהוכחנו היום הכליל את המקרה הפרטי לדיסק בשני אספקטים:

1. לכל תחום חסום (אפילו לא פשוט קשר).
2. מספיק להניח רציפות עד השפה (לעומת המשך הומומורפי לסביבה של הסגור של התחום כמו שזה היה קודם).

אפסים של פונקציה הומומורפית

הגדרה. נניח $f \in \text{Hol}(G)$, $z_0 \in G$, $f(z_0) = 0$. הוא אפס מריבוי n עבור f אם $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ וכן $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$.

דוגמא. $f(z) = \sin z$ אפס מריבוי 1 ב-0 $(\cos 0 \neq 0)$.

טענה. לפונקציה הומומורפית $f \neq 0$ ב- G יש אפסים מריבוי סופי בלבד.

הוכחה. נניח בשלילה שקיים z_0 כך ש- $f^{(n)}(z_0) = 0$ לכל n . נגדיר

$$G \supseteq \{z \in G : f^{(n)}(z) = 0 \quad \forall n \geq 0\}$$

1. A קבוצה סגורה:

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{z \in G : f^{(n)}(z) = 0\}$$

$f^{(n)}$ הומומורפית, בפרט רציפה ולכן קבוצת האפסים שלה קבוצה סגורה, כי חיתוך (כלשהו) של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.

2. A קבוצה פתוחה:

ניקח $z_1 \in A$, נבחר דיסק $D(z_1, r) \subseteq G$. אז בדיסק הזה

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!} (z - z_1)^n$$

אבל $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!} (z - z_1)^n = 0$ כי $f(z_1) = 0$. לכן $f \equiv 0$ בדיסק, לכן $f^{(n)} \equiv 0$ בדיסק, לכן $D(z_1, r) \subseteq A$ ולכן A פתוחה.

אבל $z_0 \in A$ לכן $A \neq \emptyset$, ולכן, היות ו- G תחום $A = G$ כלומר $f \equiv 0$.

□

משפט. נניח f הומומורפית בסביבת z_0 . אם ל- f יש אפס מסדר n ב- z_0 אז שייפת הצגה $f(z) = (z - z_0)^n \cdot g(z)$ כאשר $g(z)$ הומומורפית בסביבת z_0 , $g(z_0) \neq 0$.

הוכחה. נבחר דיסק סביב z_0 ואז:

$$f(z) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m$$

אפשר לכתוב

$$f(z) = (z - z_1)^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (z - z_0)^m \frac{f^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!}$$

נבחר $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (z - z_0)^m \frac{f^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!}$. רדיוס ההתכנסות לא השתנה, לכן $g(z)$ הולומורפי בדיסק, $g(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \neq 0$. $\square$

מסקנה. לקבוצת האפסים של פונקציה הולומורפית f בתחום G אין מקודת הצטברות מתוך התחום.

הערה. במקרה הממשי זה לא נכון.

הוכחה. לכל אפס של f $z_0 \in G$ יש סביבה שבה $f(z) = (z - z_0)^n \cdot g_{z_0}(z)$. לא מתאפסת ב- z_0 ובתור פונקציה רציפה גם לא בסביבה קטנה של z_0 . גם $0 \neq (z - z_0)^n$ מחוץ ל- z_0 . לכן קיימת סביבה של z_0 שבה z_0 הוא האפס היחיד של f . $\square$

הערה. יכולה להיות נקודת הצטברות בשפת התחום, למשל $f(z) = \sum \frac{1}{z}$ בחצי המישור הימני. יש לה אפסים ב- 0 , $z_n = \frac{1}{\pi n} \rightarrow 0$, אבל $f(z_n) = 0$ אבל f לא הולומורפית סביב 0 .

מסקנה. משפט היחידות

$f, g \in \text{Hol}(G)$, שמתלכדות עץ קבוצה בעלת נקודת הצטברות בתחום אז $f \equiv g$.

הסיבה היא ש- $f - g$ מתאפסת על קבוצה עם נקודות הצטברות ולכן $f - g \equiv 0$. בפרט, לפונקציה ממשית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ יכול להיות המשך אנליטי אחד בלבד ב- $\mathbb{C}$.