

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 15

חי, חי, חי! יחי אחד במאי!

1.5.11

נוסחאת קושי

אם $f : D(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ היא פונקציה הולומורפית ויתרה מכך, בעלת המשך הולומורפי לסביבת הדיסק, אז:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

למעשה לא צריך המשך הולומורפי, מספיק שהפונקציה תהיה רציפה על השפה אבל את זה נראה רק בהמשך.
מכאן מסקנה:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

דרך אפשרית לקבל אותה היא לגזור את הנוסחא שלנו.

מסקנה. יש הצגה של הפונקציה כטור חזקות:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \dots$$

טור טיילור מתכנס ושווה לפונקציה.

משפט. *Liouville*

ניח $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית וחסומה (כלומר $|f| < M$). אזי f קבועה.

הוכחה. נבחר $z_0 \in \mathbb{C}$ ונראה ש- $f'(z_0) = 0$.
אנחנו מכירים נוסחא של $f'(z_0)$: נבחר דיסק ברדיוס $R > |z_0|$ סביב הראשית,

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

עכשיו נעשה הערכה אנליטית:

$$\begin{aligned} |f'(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \max_{|z|=R} \left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \right| \cdot \underbrace{\text{Length}(|z|=R)}_{=2\pi R} = \max_{|z|=R} \left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \right| R \leq \\ &\leq \frac{MR}{|z - z_0|^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

זה נכון לכל R גדול מספיק, כלומר נוכל להקטין את $|f'(z_0)|$ ככל שנרצה, לכן, $f'(z_0) = 0$
 לכן $f' \equiv 0$ ולכן f קבועה. $\square$

הערה. משפט ליוביל נכון גם לפונקציות הרמוניות ממשיות.

משפט. המשפט היסודי של האלגברה

יהי $p \in \mathbb{C}[z]$ פולינום לא קבוע, אז ל- p יש שורש.

הוכחה. נניח בשלילה ש- $p(z) \neq 0$ לכל $z \in \mathbb{C}$. לכן, $f = \frac{1}{p}$ היא פונקציה שלמה. אבל,

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = a_0 z^n \left(1 + \underbrace{\frac{a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{a_0 z^n}}_{\xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0} \right)$$

בפרט, $|p(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \infty$. לכן, $f(z) = \frac{1}{p} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0$ כלומר עבור R גדול $|f(z)| \leq 1$ לכל $|z| \geq R$. בתוך הדיסק $\{|z| \leq R\}$ f חסומה כפונקציה רציפה, לכן f חסומה בכל $\mathbb{C}$, לפי משפט ליוביל f קבועה - סתירה. $\square$

גרסה כללית של נוסחאת קושי

הגדרה. תחום חסום G נקרא "בעל שפה רגולרית" אם $\partial G = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_T$ איחוד סופי זר (עד כדי קצוות) של מסילות C^1 .
 סימון: $\partial G = \gamma_1 + \dots + \gamma_T$.

האוריינטציה של השפה נקבעת לפי "כלל רגל שמאל" - אם הולכים על השפה עם האוריינטציה, רגל שמאל נמצאת בתוך התחום.

משפט. קושי

יהי G תחום חסום בעל שפה רגולרית ו- $f: \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה והולומורפית אז

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 0$$

הערה. לתחום G כזה כללי (עם חורים) לא נכון שלמסילה סגורה $\gamma \subseteq G$, $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.
 למשל $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ והפונקציה $f = \frac{1}{z}$.
 את זה נוכיח את בשיעור הבא.

מסקנה. נוסחאת קושי כללית.

לתחום כ"ל ופונקציה הולומורפית $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ בעלת המשך רציף ל- $\overline{G}$ אז לכל $z \notin \partial G$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} 0 & z \notin \overline{G} \\ f(z) & z \in G \end{cases}$$

הוכחה. מקרה 1: $z \notin \overline{G}$ אז $h(\zeta) \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ פונקציה הולומורפית ב- G , רציפה עד השפה:

$$\int_{\partial G} h(\zeta) d\zeta = 0$$

כנדרש.

מקרה 2: $z \in G$. נבחר $D_\varepsilon(z) \subseteq G$. נגדיר $G_\varepsilon = G \setminus \overline{D_\varepsilon(z)}$. G_ε הוא תחום עם שפה רגולרית. כעת $z \notin \overline{G_\varepsilon}$ ולכן

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

בגלל כלל רגל שמאל: $\partial G_\varepsilon = \partial G - \partial D_\varepsilon(z)$, לכן,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z)$$

כאשר השוויון האחרון הוא מנסוחאת קושי מקורית. $\square$

עוד מסקנות ממשפט ליוביל:

1. אין פונקציה הולומורפית לא קבועה מ $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ (כאשר $\mathbb{D}$ הוא דיסק היחידה). הערה. לכל תחום אחר שאינו $\mathbb{C}$ קיימת f ביהולומורפית לדיסק היחידה (משפט ההוכחה הקונפורמית של רימן). את ההוכחה לא נראה.
2. אין פונקציה הולומורפית לא קבועה $f : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}$. לא הגדרנו פונקציה הולומורפית על ספירת רימן אז ההוכחה תהיה בניפנופי ידיים: $\mathbb{C}P^1$ קבוצה קומפקטית ולכן $f(\mathbb{C}P^1)$ קומפקטית, בפרט חסומה. $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}P^1$ לכן הצמצום של f ל- $\mathbb{C}$ יניב לסתירה למשפט ליוביל.
3. לא קיימת פונקציה $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ בעלת שני מחזורים בלתי תלויים לינארית. סיבה: נניח יש שני מחזורים z_1, z_2 ונסתכל על המקבילית המתאימה Π . ערכי הפונקציה במקבילית מגדירים את הפונקציה על כל המישור: לכל z קיימים $n, m \in \mathbb{Z}$ כך ש- $z - mz_1 - nz_2 \in \Pi$ ולכן $\max_{\Pi} |f|$ הוא חסם גלובלי ב- $\mathbb{C}$ ולכן f קבועה.