

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 14

28.4.11

בשיעור הקודם הוכחנו את משפט Goursat שאומר שעבור $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית, אזי לכל שפת משולש $T \subseteq G$, $\int_T f = 0$. אלא אם מצויין אחרת, ניקח אינטגרלים עם אוריינטציה נגד כיוון השעון.

משפט. נניח $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום קמור, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית. אזי ל- f יש פונקציה קודמה (כלומר פונקציה הולומורפית F עם $F' = f$).

הוכחה. נקבע נקודה $z_0 \in G$. נגדיר $F(z) = \int_{[z_0, z]} f(w)dw$. ומותר לעשות את זה כי התחום קמור ולכן המסילה מוכלת בתחום.

דוגמא.

$$\int_{[z_0, z]} 1dw = z - z_0$$

תהי $z_1 \in G$. נוכיח ש- $F'(z_1) = f(z_1)$. נחשב את:

$$\begin{aligned} \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} &= \frac{1}{z - z_1} \left(\int_{[z_0, z]} f - \int_{[z_0, z_1]} f \right) = \\ &= \frac{1}{z - z_1} \left(\int_{[z_0, z_1]} f + \int_{[z_1, z]} f \right) = \frac{1}{z - z_1} \int_{[z_1, z]} f(w)dw \end{aligned}$$

כאשר השוויון האחרון הוא עפ"י משפט Goursat. ולכן,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) \right| &= \left| \frac{1}{z - z_1} \int_{[z_1, z]} f(w)dw - f(z_1) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{z - z_1} \int_{[z_1, z]} [f(w) - f(z_1)]dw \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|z - z_1|} \cdot \text{Length}([z_1, z]) \cdot \sup_{w \in [z_1, z]} |f(w) - f(z_1)| = \sup_{w \in [z_1, z]} |f(w) - f(z_1)| \end{aligned}$$

קיבלנו:

$$\left| \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) \right| \leq \sup_{w \in [z_1, z]} |f(w) - f(z_1)|$$

נרצה להראות שהסופרמום שואף לאפס כאשר $z \rightarrow z_1$.
 f הולמורפית, בפרט רציפה ב- z_1 . יהי $\varepsilon > 0$. קיימת $\delta > 0$ כך ש-
 אז $|z - z_1| < \delta$ ולכן אם $|w - z_1| < \delta \Rightarrow |f(w) - f(z_1)| < \varepsilon$

$$\sup_{w \in [z_1, z]} |f(w) - f(z)| \leq \sup_{w \in [z_1, z]} |f(w) - f(z_1)| < \varepsilon$$

ולכן,

$$\sup_{w \in [z_1, z]} |f(w) - f(z_1)| \xrightarrow{z \rightarrow z_1} 0$$

□

למעשה הוכחנו שאם $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום קמור, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה כך שלכל משולש $T \subseteq G$ $\int_T f = 0$ אזי ל- f יש קדומה.

מסקנה. יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום קמור, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ הולמורפית, γ פסילה סגורה גזירה ברציפות למקוטעין. אזי $\int_\gamma f = 0$.

הוכחה. ל- f יש קדומה, ואם $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ אז

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$$

□

כי $F' = f$

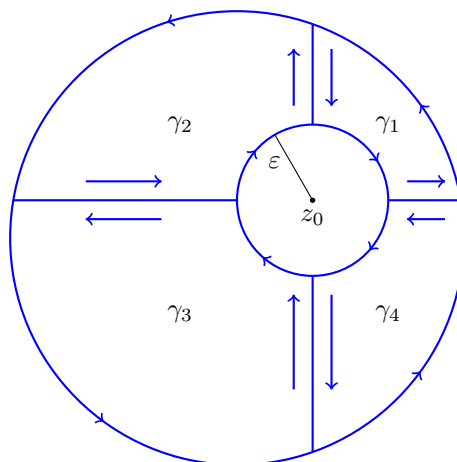
משפט. נוסחאת קושי לדיסקים

יהי $D \subseteq \mathbb{C}$ עיגול (כולל הפנים בלי השפה). נניח f הולמורפית בעיגול שמכיל את $\bar{D}$. אזי

$$\forall z_0 \in D \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

למעשה אנחנו משחזרים את ערכי הפונקציה בפנים המעגל מתוך הערכים על השפה! ואם זה נשמע מוזר אז יש משפט הבא שלא נוכיח ולא נשתמש בו: נניח ש- $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 \in \mathbb{C}$ שונים זה מזה ו- $f^{-1}(z_j) = g^{-1}(z_j)$ אז $f = g$. כלומר כדי לקבוע פונקציה הולמורפית מספיק להגדיר אותה רק ב-5 נקודות. אבל זה לא משפט שנלמד בקורס רק לידע כללי. נוכיח את משפט קושי לדיסקים:

הוכחה. נבחר $z_0 \in D$. יהי $\varepsilon > 0$



טענה. (1)
עבור $j = 1, 2, 3, 4$:

$$\int_{\gamma_j} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$$

המסילה γ_j סגורה והפונקציה $\frac{f(z)}{z - z_0}$ הולמורפית בתחום קמור שמכיל את γ_j . המכנה לא הולמורפי ב- z_0 אבל בדיוק בשביל זה הוצאנו את הכדור הקטן הזה. בחיתוך של חצי המישור שלא מכיל את z_0 ושל התחום הקמור שבו f הולמורפית $\frac{f(z)}{z - z_0}$ הולמורפית והתחום הנ"ל קמור (חיתוך של קמורים - קמור).

טענה. (2)

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{|z - z_0| = \varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

מדוע?

$$\left[\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} \right] \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$$

ולכן

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{\partial D(z_0, \varepsilon)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + 0 = 0$$

נותר רק להוכיח את הטענה הבאה:

טענה. (3)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|z - z_0| = \varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

הוכחה. נזכר בכך ש-

$$\int_{|z - z_0| = \varepsilon} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$$

לכן,

$$\int_{|z - z_0| = \varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \varepsilon \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

נותר רק להראות ש-

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{|z - z_0| = \varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \underbrace{\int_{|z - z_0| = \varepsilon} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz}_{= 2\pi i f(z_0)} \right] = 0$$

נראה ש-

$$\int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$$

נסמן,

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

קיים וסופי $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$, בפרט $|g(z)|$ חסומה ע"י M בדיסק $D(z_0, \delta)$. לכן, עבור $\varepsilon < \delta$

$$\left| \int_{|z-z_0|=\varepsilon} g(z) dz \right| \leq \text{Length}(\partial D(z_0, \varepsilon)) \cdot M = 2\pi M \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$$

□

□

כדאי לזכור בע"פ את הנסוחא:

$$\forall z_0 \in D \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

מסקנה. משפט הערך הממוצע

ניח f הולומורפית בדיסק שמכיל את $\overline{D}$ עבור עיגול פתוח $D \subseteq \mathbb{C}$. נניח ש- $D = D(z_0, R)$ אזי,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta$$

הערה. מה עם הדיסק שמכיל את $\overline{D}$? למעשה, מספיק התנאי ש- f רציפה ב- $\overline{D}$ והולומורפית ב- D .

הוכחה.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

נבחר פרמטריזציה של המעגל $\partial D(z_0, R)$:

$$0 \leq t \leq 2\pi \quad \gamma(t) = z_0 + Re^{it}$$

ונקבל:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z_0} \dot{\gamma}(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{Re^{it}} Rie^{it} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt \end{aligned}$$

□

הערות.

1. הנוסחה

$$\forall z_0 \in D \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

בעצם נכונה לא רק לדיסק D אלא לכל תחום D "פשוט קשר".

2.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} \text{אינטגרל לא מוגדר} & z_0 \in \partial D \\ 0 & z_0 \notin \overline{D} \end{cases}$$

אם $z_0 \notin \overline{D}$ אז $\frac{f(z)}{z - z_0}$ הולמורפית בסביבה של $\overline{D}$ ולכן האינטגרל מתאפס.

כל פונקציה הולמורפית היא מקומית טור חזקות

נדבר באופן כללי יותר על אינטגרל קושי.

הגדרה. נניח γ עקומה גזירה ברציפות למקוטעין ונניח φ פונקציה רציפה על תמונת γ . לפונקציה:

$$\forall z_0 \notin \gamma \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(z)}{z - z_0} dz$$

קוראים אינטגרל קושי של φ על γ .

משפט. פיתוח לטור חזקות של אינטגרל קושי

נניח f היא אינטגרל קושי של φ על γ . תהי $z_0 \notin \gamma$ ונסמן $R = d(z_0, \gamma)$ כאשר $d(z_0, \gamma) = \inf_{t \in [a, b]} |z_0 - \gamma(t)|$. אזי קיימים מקדמים $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך ש- $\forall z \in D(z_0, R)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

ובנוסף:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

הערה. בפרט, אינטגרל קושי הוא פונקציה הולמורפית ב- $\mathbb{C} \setminus \gamma$ וגם גזיר אינסוף פעמים.

הוכחה. נקבע $z_1 \in D(z_0, R)$

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(z)}{z - z_1} dz$$

נניח ש- $z_0 = 0$ (אחרת אפשר להזיז) כדי שהנוסחאות יצאו פשוטות יותר. נרשום: $\frac{1}{z - z_1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z_1}{z}}$ עבור $|z| > |z_1|$,

$$\frac{1}{z - z_1} = \frac{1}{z} \cdot 11 - \frac{z_1}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{z^{n+1}}$$

הנקודה z_1 קבועה. הטור הנ"ל מתכנס במ"ש מקומית ובהחלט בתחום $\{z \in \mathbb{C} : |z| > |z_1|\}$. מכיון ש- $\gamma[a, b]$ קבוצה קומפקטית, הטור

$$\frac{1}{z - z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{z^{n+1}}$$

מתכנס במ"ש על $\gamma[a, b]$ לכן אפשר להחליף סכום ואינטגרל.

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(z)}{z - z_1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(z) \frac{z_1^n}{z^{n+1}} \right) dz \stackrel{1}{=} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z_1^n \int_{\gamma} \frac{\varphi(z)}{z^{n+1}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n \end{aligned}$$

1. התכנסות במ"ש.

עבור

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(z)}{z^{m+1}} dz$$

כפי שהבטחנו.

ברגע שיודעים ש- $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ב- $D(0, R)$ אז f הולומורפית $f^{(k)}(0) = k! a_k$.
 $f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$.
 $\square$

מסקנה. נניח f הולומורפית בסביבה של הדיסק $\overline{D(z_0, R)}$ אזי:

$$\forall z \in D(z_0, R), f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

כאשר,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, R)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

ומכיון ש- f טור חזקות, היא גזירה אינסוף פעמים ב- $D(z_0, R)$ ובנוסף,

$$\forall z_1 \in D(z_0, R) \quad f^{(n)}(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, R)} \frac{f(z)}{(z - z_1)^{n+1}} dz$$

למעשה זאת הכללה של נוסחאת קושי.

הסבר למסקנה: מנוסחאת קושי,

$$\forall z_1 \in D(z_0, R) \quad f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{z - z_1} dz$$

כלומר זה אינטגרל קושי של f על $\gamma = \partial D(z_0, R)$. $d(z_0, \gamma) = R$ לכן f היא טור חזקות וגזירה אינסוף פעמים ומתקיים:

$$2\pi i f^{(n)}(z_0) = \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

איך נקבל ביטוי ל- $f^{(n)}(z_1)$? נניח $z_1 \in D(z_0, R)$ נסמן $r = d(z_1, \gamma) = R - |z_1 - z_0|$ מהמשפט על אינטגרל קושי,

$$\forall z \in D(z_1, r) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1)^n$$

עבור

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma=\{|z-z_0|=R\}} \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} dz$$

ובפרט

$$f^{(n)}(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}} dz$$

לסיכום, פונקציה הולומורפית היא C^∞ . אם ל- f יש קדומה אז f הולומורפית (כי אז היא נגזרת של פונקציה הולומורפית).

מסקנה. ההפך של משפט Goursat נניח $G \subseteq \mathbb{C}$ קמור, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה ו- $\int_T f = 0$ לכל משולש T . אזי f הולומורפית.

□

הוכחה. כי ל- f יש קדומה כפי שהוכחנו.