

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 13

7.4.11

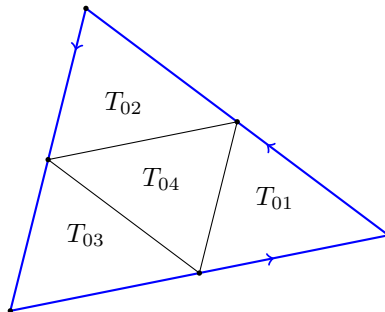
היום נוכיח שני משפטים. אחד מהם שניסחנו בסוף שיעור שעבר והשני מעניין. נתחיל עם המעניין:

משפט. Goursat או משפט קושי למשולשים. נניח $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ הולמורפית. נניח בתחום יש משולש T עם אוריינטציה נגד כיוון השעון. אז

$$\int_T f = 0$$

עד עכשיו ידענו דברים כאלה לפונקציות שיש להן פונקציה קדומה. בהוכחה להבדיל מרוב ההוכחות בקורס יש רעיון.

הוכחה.



נסמן אמצעי צלעות של המשולש ונחבר. נקבל 4 משולשים. לכל אחד נקבע אוריינטציה נגד כיוון השעון. נחשב סכום האינטגרלים על 4 המשולשים. נסמן: $T = T_0$, $I = \int_T f$. נסמן ב- $K_0 \subseteq \mathbb{C}$ את המשולש המלא שהעקומה T תוחמת, כולל השפה. נחשב את $\int_{T_{01}} f + \int_{T_{02}} f + \int_{T_{03}} f + \int_{T_{04}} f$. אינטגרל של משולש זה אינטגרל על כל צלע שלו לכן לכאורה נצטרך לחשב 12 אינטגרלים. זה הרבה, אבל נשים לב שיש הרבה הצטמצמויות. לכל צלע פנימית יש צלע עם אוריינטציה הפוכה בדיוק. לכן הסכום יהיה בדיוק האינטגרל על המשולש המקורי. לכן,

$$\int_{T_{01}} f + \int_{T_{02}} f + \int_{T_{03}} f + \int_{T_{04}} f = \int_T f$$

לכן,

$$|I| \leq \sum_{j=1}^4 \left| \int_{T_{0j}} f \right|$$

נסמן ב- T_1 את אחד מבין $\{T_{0j}\}_{j=1,2,3,4}$ שעבורו:

$$\left| \int_{T_1} f \right| \geq \frac{|I|}{4}$$

נשים לב שמבניית המשולשים:

$$\text{Length}(T_1) = \frac{1}{2} \text{Length}(T_0)$$

נחזור על התהליך ובאינדוקציה נקבל סדרת משולשים $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ שתוחמים את הקבוצה הקומפקטית K_n עם התכונות הבאות:

$$1. \left| \int_{T_n} f \right| \geq \frac{1}{4^n} |I|$$

$$2. \text{Length}(T_n) = \frac{1}{2^n} \text{Length}(T_0)$$

$$3. K_n \subseteq K_{n-1}$$

$$4. \text{diameter}(K_n) = \sup_{x,y \in K_n} |x - y| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ממשפט קנטור, החיתוך: $\bigcup_{n=0}^\infty K_n = \{z_0\}$ עבור $z_0 \in G$. כעת לכל n : $K_n \subseteq D(z_0, \text{Length}(T_n))$

זה מסיים את החלק הטופולוגי-גיאומטרי של ההוכחה. עוד לא השתמשנו בזה שהפונקציות הוֹלֹמורפיות $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ גזירה ב- z_0 אז $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + R(z)$ כאשר

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R(z)}{|z - z_0|} = 0$$

נסמן $\varepsilon_n = \sup_{z \in T_n} \frac{R(z)}{|z - z_0|}$, לכן, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, כעת:

$$|I| \leq 4^n \left| \int_{T_n} f(z) dz \right| = 4^n \left| \int_{T_n} [f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + R(z)] dz \right|$$

$f(z_0)$ קבועה, לכן בפרט יש לה קדומה, והאינטגרל שלה על מסלול סגור הוא 0. גם ל- $f'(z_0)(z - z_0)$ יש קדומה ולכן גם האינטגרל שלה על מסלול סגור הוא 0. אז:

$$\begin{aligned} 4^n \left| \int_{T_n} f(z) dz \right| &= 4^n \left| \int_{T_n} [f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + R(z)] dz \right| = \\ &= 4^n \left| \int_{T_n} R(z) dz \right| \leq 4^n \text{Length}(T_n) \sup_{z \in T_n} |R(z)| \end{aligned}$$

אנחנו יודעים שלכל $z \in T_n$: $|R(z)| < \varepsilon_n |z - z_0|$ לפי הגדרת ε_n . ונזכר ש- T_n מוכל בדיסק קטן סביב z_0 לכן $\varepsilon_n |z - z_0| \leq \varepsilon_n \text{Length}(T_n)$ לסיכום, לכל n :

$$|I| \leq 4^n \left(\frac{\text{Length}(T)}{2^n} \right) \cdot \varepsilon_n \cdot \frac{\text{Length}(T)}{2^n} = (\text{Length}(T))^2 \cdot \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

לכן, $I = \int_T f = 0$

למעשה הוכחנו שאם f הולמורפית ו- γ מסילה "קטנה" אז $(Length(L))^2 \ll \int_{\gamma} f$. ועכשיו בגלל שאפשר לפרק משולשים, ריבועים וכו' להמון צורות "קטנות" כך ש-

$$\sum_{\text{הצורות הקטנות}} (Length(\gamma_i))^2 \approx \sum Area(K_i) = Area(K) < c$$

בקיצור זה יעבוד גם לריבועים. ואולי אפילו לצורות אחרות. את השימושים נדחה לאחרי פסח. נשלים את החובה מהשיעור שעבר:

משפט. תהי $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה, $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ גזירה ברציפות למקוטעין. אז לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך ש-
לכל חלוקה $\Pi = \{a = t_0 < \dots, t_N = b\}$ עם רזולוציה $\lambda(\Pi) = \max_{i=0, \dots, N} |t_{i+1} - t_i| < \delta$ מתקיים

$$\left| \int_{\gamma} f - \int_{\gamma_{\Pi}} f \right| < \varepsilon$$

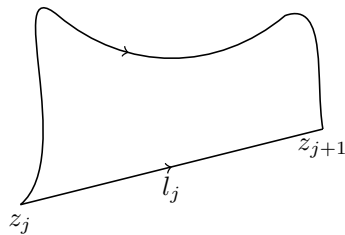
כאשר γ_{Π} הוא הקו הופליגונלי

$$\gamma(a) = \gamma(t_0) \rightarrow \gamma(t_1) \dots \gamma(t_N) = \gamma(b)$$

כלומר הקו הפוליגונלי שמחבר את נקודות החלוקה.

הוכחה. נתון $\varepsilon > 0$ מה רוצים מ- δ ?
 $\Pi = \{a = t_0 < \dots < t_N = b\}$ נסמן את הקו $z_i \rightarrow z_i = l_i$. אז:

$$\left| \int_{\gamma} f - \int_{\gamma_{\Pi}} f \right| = \left| \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\gamma_j} f - \int_{l_j} f \right|$$



אם נחליף אוריינטציה נקבל מסילה סגורה: $c_j = \gamma_j - l_j$ מסילה סגורה, ואז לדוגמא אפשר להוסיף כל פונקציה הולמורפית (למשל קבועה) כי האינטגרל שלה 0 על מסלול סגור:

$$\int_{\gamma_j} f - \int_{l_j} f = \left| \int_{c_j} f(z) dz \right| = \left| \int_{c_j} [f(z) - \underbrace{f(z_j)}_{\text{constant}}] dz \right|$$

מתרגיל בית, מרציפות במ"ש אפשר לבחור $\delta > 0$ כך שבהכרח $|f(z) - f(z_j)| < \varepsilon$ לכל $z \in c_j$. עבור δ כנ"ל,

$$|\int_{c_j} f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon Length(c_j) \leq 2\varepsilon Length(\gamma_j)$$

לכן,

$$\int_{\gamma} - \int_{\gamma_{\Pi}} \leq \sum_{j=1}^N |\int_{\gamma_j} f - \int_{l_j} f| \leq 2\varepsilon \sum_{j=1}^N Length(\gamma_j) = 2\varepsilon Length(\gamma)$$

□