

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 12

7.4.11

אינטגרל לאורך מסילה אינטגרל קווי

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ גזירה ברציפות למקוטעין f מוגדרת על התמונה של γ :

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

זו הכללה של האינטגרל ב- $\mathbb{R}$: אם לוקחים עקומה שלא מוגדרת בכל המישור אלא רק בין הנקודות α, β שנמצאות על הישר הממשי: $\gamma(t) = t$, $t \in [\alpha, \beta]$ ואז:

$$\int_{\gamma} f = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$$

הכלי השימושי ביותר לחישוב אינטגרלים היה נוסחת ניוטון לייבניץ: נניח $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה וקיימת F הולומרפית עם $F' = f$ ונניח $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ עקומה C^1 למקוטעין אזי

$$\int_{\gamma} f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

בפרט, אינטגרל כזה קשור רק לנקודת ההתחלה ונקודת הסיום של העקומה ולא איך היא עוברת (במימד אחד הטענה הזאת נכונה אך מנוונת) ומכאן: γ עקום סגור אז $\int_{\gamma} f = 0$.
דוגמא שחשוב לזכור:

$$\gamma(t) = z_0 + Re^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

מעגל ברדיוס R עם מרכז ב- z_0 נגד כיוון השעון. אז:

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & -1 \neq n \in \mathbb{Z} \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

כאשר אנחנו משרטטים עקומה במישור, הציור מייצג את העקומה רק עד כדי פרמטריזציה. אם חושבים על t כזמן ו- γ כמסלול של חלקיק כלשהו לאורך הזמן אז הציור לא מבטא באיזה קצב החלקיק מתקדם ואם הקצב בכלל אחיד או לא.

הגדרה. נניח $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$ עקומה C^1 למקוטעין, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$ נקראת "רה-פרמטריזציה" של γ_1 אם קיימת $\beta : [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$ עולה (לא יורדת) ו- C^1 למקוטעין כך ש- $\forall t \in [a_2, b_2], \gamma_2(t) = \gamma_1(\beta(t))$.

הערה. אם היינו בוחרים פונקציה יורדת היינו מחליפים אוריינטציה.

טענה. נניח γ_2 היא רה־פרמטריזציה של γ_1 ו- f מוגדרת על התמונה של γ_1 . אזי:

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

במידה והאינטגרל באגף שמאל קיים.

הוכחה.

$$\int_{\gamma_2} f = \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(t)) \dot{\gamma}_2(t) dt$$

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(\beta(t))$$

$$\dot{\gamma}_2(t) = \dot{\gamma}_1(\beta(t)) \dot{\beta}(t)$$

$$\int_{\gamma_2} f = \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_1(\beta(t))) \dot{\gamma}_1(\beta(t)) \underbrace{\dot{\beta}(t)}_{ds} dt = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(s)) \dot{\gamma}_1(s) ds = \int_{\gamma_1} f$$

□

תזכורת. לא צריך חח"ע בהחלפת משתנים בחדו"א 2 כי:

$$\int_a^b f(g(t)) g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx$$

וזה נכון כי אם F הקדומה של f אז: $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = F(g(b)) - F(g(a))$ ובגלל ש-

$$\int_a^b f(g(t)) g'(t) dt = F(g(b)) - F(g(a)) \text{ אז: } F(g(t)) g'(t) \text{ של הקדומה של } f(g(t))$$

לכן הפרמטריזציה לא חשובה ולכן אין בעיה לצייר. מקובלים סימונים לאינטגרל שמתעלמים מפרמטריזציה. עבור $a, b \in \mathbb{C}$: $\int_{[a,b]} f(z) dz$ אינטגרל על מסילה כלשהי בין a ל- b . אפשר לקחת מסיאלה ספציפית: $\gamma(t) = (1-t)a + tb$, $t \in [0, 1]$. בנוסף: $\int_{|z-z_0|=R} f(z) dz = \int_{\gamma} f$ הכוונה שלוקחים מעגלים סביב z_0 ברדיוס R והמוסכמה היא שלוקחים נגד כיוון השעון עבור $0 \leq t \leq 2\pi$, $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$.

תרגיל. כל עקומה חח"ע פרט לקצוות, שתמונתה מעגל והיא נגד כיוון השעון מובילה לאותו אינטגרל (נקודת ההתחלה שהיא גם נקודת הסיום לא חשובה).

פעולות על עקומות

1. היפוך אוריינטציה: $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, מגדירים $-\gamma : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{C}$ ואז $-\gamma(t) = \gamma(-t)$.

נשים לב:

$$\int_{\gamma} f = - \int_{-\gamma} f$$

2. שרשור עקומות: אם γ_2 מתחילה במקום שבו γ_1 מסתיימת אז מסמנים ב- $\gamma_1 + \gamma_2$ את השרשור שלהם. מתקיים: $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$.

דוגמא. נחשב את האינטגרל של $f(z) = |z|$ לאורך המסילה C (חצי מעגל סביב הראשית מ- $-i$ עד i נגד כיוון השעון). דבר ראשון שצריך לעשות זה פרמטריזציה:

$$\gamma(t) = e^{it} \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_C f &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |e^{it}| i e^{it} dt = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d}{dt}(e^{it}) dt = e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2} = 2i \end{aligned}$$

אינטגרלים והתכנסות במ"ש

משפט. נניח $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ סדרת פונקציות רציפות המתכנסות במ"ש ל- f בתחום G תהי $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ עקומה C^1 לפקוטעין. אזי:

$$\int_{\gamma} f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f$$

הערה. מספיק התכנסות במ"ש על התמונה של γ , התמונה של γ קומפקטית ולכן כמעט מתרגיל בשיעורי בית במ"ש מקומית שקול לבמ"ש על קבוצה קומפרטית, לכן מספיק אפילו במ"ש מקומית.

למה.

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq \text{Length}(\gamma) \cdot \sup_{a \leq t \leq b} |f(\gamma(t))|$$

כאשר $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ C^1 לפקוטעין ו- f אינטגרלית על γ .

הוכחה.

$$\left| \int_{\gamma} f \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \right|$$

נסמן ב- $M = \sup_{a \leq t \leq b} |f(\gamma(t))|$ אזי

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\dot{\gamma}(t)| dt \leq \\ &\leq M \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = M \cdot \text{Length}(\gamma) \end{aligned}$$

□

כעת להוכחת המשפט:

הוכחה. f גבול במ"ש של רציפות לכן רציפה ואינטגרבילית.

$$\left| \int_{\gamma} f_n - \int_{\gamma} f \right| = \left| \int_{\gamma} [f_n - f] \right| \leq \text{Length}(\gamma) \cdot \sup |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

אינטגרלים ממשיים עם חישוב מרוכב

ראינו:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2n} t = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

בחדו"א 2 חישבנו במאמץ רב:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

נסתכל על הפונקציה הבאה עבור $z \in \mathbb{C}$.

$$f(z) = e^{-z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{n!}$$

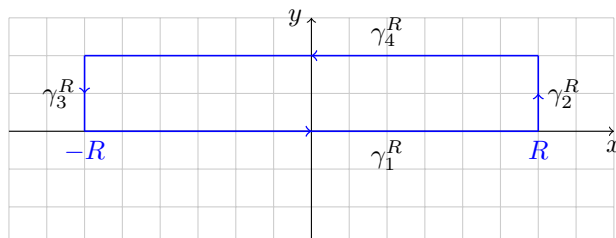
כי פשוט הצבנו z^2 בטור של e^z לכן יש לנו התכנסות נקודתית לפחות.

$$e^{-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{n!}$$

ההתכנסות נורמלית (כי זה טור חזקות), עם $R = \infty$. לכן ל- $f(z) = e^{-z^2}$ יש קדומה ב- $\mathbb{C}$.

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

מכאן שלכל γ סגורה C^1 למרוטעין $\int_{\gamma} e^{-z^2} = 0$.
 γ^R :



לכן

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} e^{-z^2} dz = 0$$

אז $\gamma = \gamma_1^R + \gamma_2^R + \gamma_3^R + \gamma_4^R$. אז אנחנו יודעים:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{\gamma_1^R} e^{-z^2} + \int_{\gamma_2^R} e^{-z^2} + \int_{\gamma_3^R} e^{-z^2} + \int_{\gamma_4^R} e^{-z^2} \right] = 0$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1^R} e^{-z^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

נראה:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2^R} e^{-z^2} dz = 0$$

$$.0 \leq t \leq b, \gamma_2^R(t) = R + it$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2^R} e^{-z^2} dz \right| &= \left| \int_0^b e^{-(R+it)^2} i dt \right| = \left| i \int_0^b e^{-R^2+t^2} e^{-2Rit} dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^b |e^{-R^2+t^2}| \cdot |e^{-2Rit}| dt \leq b \cdot e^{-R^2} e^{b^2} = (be^{b^2})e^{-R^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

באותו אופן:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_4^R} e^{-z^2} dz = 0$$

לסיכום:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\pi} + \int_{\gamma_3^R} e^{-z^2} dz \right] = 0$$

ולכן

$$\int_{-\gamma_3^R} e^{-z^2} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \sqrt{\pi}$$

נבחר פרמטריזציה:

$$(-\gamma_3^R)(t) = t + it \quad -R < t < R$$

קיבלנו:

$$\int_{-R}^R e^{-(t+ib)^2} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \sqrt{\pi}$$

לכן, לכל $b \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ib)^2} dx = \sqrt{\pi}$$

הערה. הוכחנו ש-

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ib)^2} dx$$

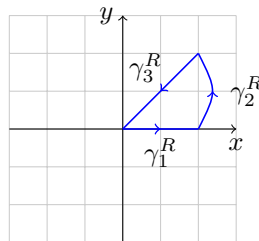
$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ib)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+b^2} e^{-2ibx} dx = \\ &= e^{b^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} (\cos(2bx) - i \sin(2bx)) dx \end{aligned}$$

לכן,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) = \sqrt{\pi} e^{-b^2}$$

כלומר הצלחנו לחשב אינטגרל של פונקציה בלי קדומה אלמנטרית.

דוגמא.



כאשר הזווית היא $\pi/4$. אפשר להראות ש-

$$\int_{\gamma_2^R} e^{-z^2} z \rightarrow 0$$

לכן,

$$\int_{\gamma_1^R} e^{-z^2} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

מקבלים שלכל $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{\gamma} e^{-z^2} dz$$

לכן: $\gamma(t) = e^{i\theta t}$

$$\int_{\gamma} e^{-z^2} dz = e^{i\theta} \int_0^{\infty} e^{-t^2} e^{2i\theta} dt$$

ואם $\theta = \frac{\pi}{4}$ אז:

$$\int_0^\infty e^{-it^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{1-i}{2} \right)$$

ההגדרה של אינטגרל נראה קצת מלאכותית. כנראה שהיה הגיוני יותר להתחיל מסכומי רימן. המשפט הבא מצדיק את ההגדרה:

משפט. יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה רציפה, $\gamma: [a, b] \rightarrow G$ לפרוטטעיון. יהי $\varepsilon > 0$ אזי קיימת $\delta > 0$ כך ש-

1. לכל חלוקה $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ עם רזולוציה $\delta \geq$ מתקיים:

$$\left| \int_\gamma f - \sum_{i=0}^{N-1} f(z_i)(z_{i+1} - z_i) \right| < \varepsilon$$

כאשר $z_i = \gamma(t_i)$.

2. לכל חלוקה $\Pi = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$ נסמן ב- γ_Π את הקו הפוליגוני:

$$\gamma_\Pi = \{\gamma(t_0) \rightarrow \gamma(t_1) \rightarrow \dots \rightarrow \gamma(t_N)\}$$

אם הרזולוציה Π קטנה מ- δ אז:

$$\left| \int_{\gamma_\Pi} f - \int_\gamma f \right| < \varepsilon$$