

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 11

31.03.11

האינטגרל

בחדו"א 2 היו שלושה "סוגי" אינטגרלים:

1. ההפך מנגזרת, פונקציה קדומה: $\int f(t)dt$.

2. שטח מתחת לגרף – אינטגרל של פונקציה על קבוצה: $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$.

3. אינטגרל עם אוריינטציה: אינטגרל מ- a ל- b : $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

אנחנו נכליל את הסוג השלישי.

הגדרה. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ אז

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b \operatorname{Re} f(t)dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t)dt$$

נוכל גם לכתוב:

$$\int_a^b f(t)dt \approx \sum_{i=1}^m f(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

שפרושו הגבול כשרזולוצית החלוקה שואפת ל-0.

האינטגרל לינארי ואדיטיבי ביחס לתחום.

טענה.

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

הוכחה. קיים $\theta \in \mathbb{R}$ כך ש- $e^{i\theta} \int_a^b f$ הוא מספר ממשי אי שלילי. עתה,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f \right| &= \left| e^{i\theta} \int_a^b f \right| = e^{i\theta} \int_a^b f = \int_a^b f e^{i\theta} = \operatorname{Re} \int_a^b e^{i\theta} f = \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} e^{i\theta} f \leq \int_a^b |e^{i\theta} f| = \int_a^b |f| \end{aligned}$$

□

אינטגרל לאורך עקומה

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ עקומה. כמעט כל העקומות שנראה יהיו רציפות וגזירות ברציפות למקוטעין.

שאלה. מהו האורך של $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ גזירה ברציפות למקוטעין?

תשובה.

$$\begin{aligned} \text{Length}(\gamma) &= \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \approx \\ &\approx \sum |\dot{\gamma}(t_i)|(t_{i+1} - t_i) \approx \sum |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \end{aligned}$$

משמעות הקירוב הוא שנקרב את העקומת ע"י קו פוליגוני ובשאיפה יצא קרוב.

דוגמאות.

$$1. \quad t \in [0, 1], \gamma(t) = (1-t)z + tw$$

$$\text{Length}(\gamma) = \int_0^1 |-z + w| dt = |w - z|$$

$$2. \quad t \in [0, 2\pi], \gamma(t) = e^{it}$$

$$\text{Length}(\gamma) = \int_0^{2\pi} |ie^{it}| dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

גם זה מסתדר עם מה שהכרנו.

הגדרה. נניח $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ גזירה ברציפות למקוטעין. תהי f פונקציה המוגדרת על התמונה של γ . מגדירים:

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

אם האינטגרנד אינטגרבילי רימן.

הערות.

1. חשוב לשים לב שאין ערך מוחלט סביב $\dot{\gamma}$ להבדיל מחישוב אורך עקומה.

2. אם f רציפה על התמונה של γ אז $\int_{\gamma} f$ מוגדר.

3. אם במקום חלוקה של קטע כמו באינטגרל רימן נחלק את העקומה אז

$$\int_{\gamma} f \approx \sum f(z_i)(z_{i+1} - z_i)$$

היינו יכולים להגדיר גם ככה אבל בכל מקרה היינו בסוף מגיעים לשיוויון הנ"ל. הסבר אינטואיטיבי:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt &\approx \\ &\approx \sum f(\gamma(t_i)) \dot{\gamma}(t_i)(t_{i+1} - t_i) \approx \sum f(\gamma(t_i))(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)) \end{aligned}$$

תכונות:

$$1. \text{ לינאריות: } \int_{\gamma} af + bg = a \int_{\gamma} f + b \int_{\gamma} g$$

$$2. \text{ אדיטיביות: } \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ ויהי } a < c < b. \text{ אז נסמן: } \gamma_1 = \gamma|_{[a, c]}, \gamma_2 = \gamma|_{[c, b]}. \text{ אזי } \int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

כלי שימושי לחישוב אינטגרלים הוא נוסחאת ניוטון לייבניץ: נניח $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית ונניח $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ גזירה ברציפות למקוטעין. אזי:

$$\int_{\gamma} f'(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

הערה. כרגע אנחנו להוסיף את ההנחה המלאכותית ש- f' פונקציה אינטגרלית. בהמשך נראה שזה אוטומטי פונקציה הולומורפית.

הוכחה. נניח γ גזירה ברציפות למקוטעין ומאדיטיביות ינבע למקרה הכללי.

$$\int_{\gamma} f' = \int_a^b f'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dz} (f(\gamma(t))) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

□

מסקנות.

$$1. \int_{\gamma} f' \text{ תלוי רק בקצוות, } \gamma(a) \text{ ו- } \gamma(b).$$

$$2. \text{ נניח שהפסילה שלנו סגורה, כלומר } \gamma(a) = \gamma(b). \text{ אז } \int_{\gamma} f' = 0$$

דוגמאות.

$$1. \gamma(t) = Re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi - \text{מעגל ברדיוס } R \text{ נגד כיוון השעון.}$$

$$\int_{\gamma} z^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

נחשב בשתי דרכים: חישוב ישיר:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^n &= \int_0^{2\pi} \underbrace{(Re^{it})^n}_{f(\gamma(t))} \underbrace{iRe^{it}}_{\dot{\gamma}(t)} dt = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \\ &= \begin{cases} 2\pi i, & n = -1 \\ iR^{n+1} \int_0^{2\pi} \cos((n+1)t) + i \sin((n+1)t) dt = 0, & n \neq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

מניוטון לייבניץ:

$$\text{אם } n \neq -1 \text{ אז } \underbrace{z^n}_{f(z)} = \underbrace{\left(\frac{z^{n+1}}{n+1} \right)'}_{g(z)} \text{ ניקח } G = \{z : \frac{R}{2} < |z| < 2R\} \text{ אז}$$

$$\text{הפונקציה } g(z) \text{ הולומורפית ומתקיים } g' = f. \text{ אז } \int_{\gamma} z^n dz = \int_{\gamma} g' = 0$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \gamma(t) = e^{it} \quad 2.$$

נחשב בשתי דרכים:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_{\gamma} \frac{1}{z} z^k \left(\frac{1}{z}\right)^{2n-k} dz = \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_{\gamma} z^{2k-2n-1} dz = \binom{2n}{n} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

חישוב ישיר:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} (2 \cos t)^{2n} i e^{it} dt = i 4^n \int_0^{2\pi} \cos^{2n} t dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2n} t dt = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

שזה הסיכוי לקבל בדיוק חצי עצים וחצי פליים בהטלת מטבע הוגן.