

פונקציות מרוכבות 1 – הרצאה 10

31.03.11

טורים

תזכורת. יהיו $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ מספרים מרוכבים. הטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ מתכנס בהחלט אם $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < +\infty$.

במקרה כזה נוכל להשתמש במשפט מחדו"א שאומר שאם טור מתכנס בהחלט, אפשר לשנות את סדר הסכימה ועדיין הטור ייתכנס לאותו הסכום.

תזכורת. מכפלת קושי:
נניח $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ מתכנסים בהחלט אז:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \sum_{l=0}^{\infty} b_l = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_k b_l$$

באגף הימני זה כמובן סכום כפול. הטור $\sum_{k,l=0}^{\infty} a_k b_l$ מתכנס בהחלט לכן לא חשוב סדר הסכימה. אחד מסדרי הסכימה השימושיים הוא לעבור על אלכסונים (אם נייצג את המקדמים במטריצה) כלומר:

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} a_k b_l = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

דוגמא. אם $|z| < 1$ אז $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ מתכנס בהחלט. לכן עבור $|z| < 1$:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{l=0}^{\infty} z^l = \sum_{n=0}^{\infty} (z^k z^{n-k}) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$$

נרצה לדבר גם על טורי פונקציות.

הגדרה. נניח $u_n(z)$ פונקציה ב- G . הטור $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ מתכנס במ"ש ב- G לפונקציה f אם:

$$\sup_{z \in G} \left| \sum_{n=0}^N u_n(z) - f(z) \right| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

איך מוכיחים שיש התכנסות במ"ש?

משפט. בוחן M של ויירשטראס

נניח $\{u_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ פונקציות בתחום G ונניח $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרה של מספרים חיוביים כך ש-

$$1. \sup_{z \in G} |u_n(z)| \leq M_n.$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty.$$

אזי $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ מתכנס במ"ש ובהחלט בתחום G .

הערות.

1. מספיק למצוא $\{M_n\}$ החל מ- n מסויים.

2. הטור $\sum u_n(z)$ מתכנס במ"ש ובהחלט אם $\sum |u_n(z)|$ מתכנס במ"ש.

הגדרה. הטור $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ מתכנס במ"ש מקומית ב- z_0 אם יש סביבה של z_0 שבה מתכנס במידה שווה.

הגדרה. הטור $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ מתכנס במ"ש מקומית ב- G אם מתכנס במ"ש מקומית בכל נקודה $z_0 \in G$.

דוגמא. הטור $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ מתכנס נקודתית ב- $D(0,1)$. האם נתכנס במ"ש ב- $D(0,1)$? לא.

$$\sup_{|z| < 1} \sum_{n=0}^N z^n - \frac{1}{1-z}$$

לא שואף ל-0 כי למשל $z_N = 1 - \frac{1}{N}$.
הטור $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ מתכנס מקומית ב- $D(0,1)$. כי ניקח סביבה קטנה שלא קרובה לשפה ואז קיימת עיגול גדול שבו כל הסביבה הזאת מוכלת ואז לפי M בוחן של וויירשטראס.

לפעמים אומרים ש- $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ מתכנס נורמלית בתחום G אם הוא מתכנס בהחלט ובמידה שווה מקומית.

טור חזקות

הגדרה. טורים מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, זה סביב אפס. כמובן אפשר גם סביב כל נקודה אחרת $z: \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

הערה. $z^0 = 1$ לכל $z \in \mathbb{C}$, כולל $0^0 = 1$.

הגדרה. רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ מוגדר להיות $R \in [0, \infty]$ כך ש-

$$\frac{1}{R} = \limsup |c_n|^{1/n}$$

"באופן גס: $c_n \approx \frac{1}{R^n}$ ".
אם למשל $c_n = 2^n$ אז $R = \frac{1}{2}$ אך לעומת זאת אם $c_n = 2^n \cdot n^7$ עדיין $R = \frac{1}{2}$.
(זה כי $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^7)^{1/n} = 1$).
עובדה שימושית, משפט דלמבר:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{c_{n+1}}$$

אם קיים הגבול.

למה זה חשוב לנו? כי תחום ההכנסות של $\sum c_n (z - z_0)^n$ הוא בערך $D(z_0, R)$.

משפט. נניח $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ טור חזקות, רדיוס ההתכנסות $R \in [0, \infty]$ אזי:

1. הטור מתכנס נורמלית ב- $D(z_0, R)$.
2. אם $|z - z_0| > R$ אז הטור מתבדר ב- z .
3. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ הוא פונקציה הולומורפית ב- $D(z_0, R)$ ונגזרתה

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (z - z_0)^{n-1}$$

ורדיוס ההתכנסות של הנגזרת הוא בדיוק כמו קודם (כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$).

מסקנות.

1. $f(z) = \sum c_n(z - z_0)^n$ גזיר ∞ פעמים ב- $D(z_0, R)$. מתקיים:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)c_n(z - z_0)^{n-k}$$

מה קורה כאשר נציב $z = z_0$? מקבלים ש- $\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = c_k$.

בפרט אם f שווה לטור חזקות ב- $D(z_0, R)$ אפשר לשחזר את מקדמי הטור מ- f לפי הנוסחה הנ"ל.

2. יש קדומה. $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ אז $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ היא בעלת אותו רדיוס התכנסות ומתקיים $G'(z) = f(z)$.

הוכחה.

1. בה"כ $z_0 = 0$. נניח $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} = \frac{1}{R}$.

יהי $\varepsilon > 0$. קיים N כך ש- $\forall n > N$:

$$|c_n|^{1/n} \leq \frac{1 + \varepsilon}{R}$$

(נניח בינתיים $0 < R < \infty$).

כלומר לכל $n > N$ מתקיים $|c_n|R^n \leq (1 + \varepsilon)^n$.

$$\sup_{z \leq \frac{R}{1+4\varepsilon}} |c_n z^n| \leq |c_n| \left(\frac{R}{1+4\varepsilon}\right)^n \leq \frac{(1+\varepsilon)^n}{(1+4\varepsilon)^n} \leq (1-\varepsilon)^n$$

ולכן $M_n = (1 - \varepsilon)^n$, טור מתכנס ו- $\sum |c_n z^n| \leq \sum M_n < \infty$ ויש התכנסות בהחלט ובמ"ש ב- $D(0, \frac{R}{1+4\varepsilon})$.

מדוע $1 - \varepsilon < \frac{1+\varepsilon}{1+4\varepsilon} < \frac{1}{2} < \varepsilon < 0$? כי

$$1 + \varepsilon < (1 - \varepsilon)(1 + 4\varepsilon) = 1 + 3\varepsilon - 4\varepsilon^2$$

$$1 \leq 3 - 4\varepsilon$$

לסיכום, לכל $0 < \varepsilon < 1/2$ יש התכנסות בהחלט ובמ"ש ב- $D(0, \frac{R}{1+4\varepsilon})$ ולכן יש התכנסות בהחלט ובמ"ש מקומית ב- $D(0, R)$.

מקרים של $R = 0, R = \infty$ מאוד דומים ולא נעשה אותם.

2. נניח $|z| > R$ ונניח $0 < R < \infty$ אז $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n R^n|^{1/n} = 1$ אז

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n z^n|^{1/n} > 1$$

לכן,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n z^n| > 1$$

בפרט האיבר הכללי של הטור $\sum c_n z^n$ לא שואף ל-0 ולכן הטור מתבדר.

3. נניח $z_0 = 0, R > 0$. ניקח $0 < \rho < R$ נראה ש- f הולמורפית עם נגזרת כנ"ל ב- $D(0, \rho)$.

תהי $z_0 \in D(0, \rho)$. $\forall |z| < R$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

נסמן

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n z^{n-1}$$

וננסה להוכיח:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = g(z_0)$$

במקום זה נראה:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) \right] = 0$$

מניפולציות אלגבריות:

$$f(z) - f(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (z^n - z_0^n)$$

עכשיו:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1} \right]$$

עבור $z \neq z_0$ מתקיים:

$$z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \dots + z_0^{n-1})$$

לכן,

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \underbrace{z_0^{n-1} + z_0^{n-2}z + \dots + z^{n-1}}_{n \text{ מחוברים}}$$

נרשום:

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1} = \sum_{k=0}^n z_0^{n-1-k} (z^k - z_0^k)$$

נניח ש- $z \neq z_0$, $z, z_0 \in D(0, \rho)$. לכל k $z^k - z_0^k = (z - z_0)(z^{k-1} + \dots + z_0^{k-1})$.
לכן,

$$|z^k - z_0^k| \leq |z - z_0| \cdot k \cdot \rho^{k-1}$$

לסיכום,

$$\left| \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \rho^{n-1-k} |z - z_0| k \rho^{k-1}$$

לכן,

$$\left| \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - n z_0^{n-1} \right| \leq |z - z_0| \rho^{n-2} n^2$$

עבור $z, z_0 \in D(0, \rho)$, $z \neq z_0$. לכן,

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \rho^{n-2} n^2 \right) (z - z_0)$$

אם נראה שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \rho^{n-2} n^2 < M < \infty$ אז סיימנו כי במקרה כזה

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) \right| \leq M |z - z_0| \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$$

למה $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \rho^{n-2} n^2 < M < \infty$? מבחן השורש:

$$\limsup (|c_n| \rho^{n-2} n^2)^{1/n} \leq \frac{\rho}{R} < 1$$

□

דוגמאות.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} = 0$ לכן $R = \infty$, מתכנס נורמלית ב- $\mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

ולכן, לכל $z \in \mathbb{C}$, $f'(z) = f(z)$. כמו כן $f(0) = 1$.
נוכיח ש- $f(z) = e^z$:

$$\frac{d}{dz}(f(z)e^{-z}) = f'(z)e^{-z} - f(z)e^{-z} = 0$$

לכן $f(z)e^{-z}$ קבועה, $f(z) = e^z$.

2. לכל $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z = \sum \frac{z^{2n}}{(2n)!} (-1)^n$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

ראינו שלכל $z \in \mathbb{C}$:

$$e^z = \sum \frac{z^n}{n!}$$

אז,

$$\frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left(\frac{i^n + (-i)^n}{2} \right) = \sum \frac{z^{2n}}{(2n)!} (-1)^n$$

באותו אופן

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3. לכל $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

$$l(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

רדיוס ההתכנסות הוא 1.

$$l'(z) = \frac{1}{z+1}$$

נראה ש- $l(z) = \text{Log}(1+z)$ ואכן,

$$\text{Log}(1) = 0 = l(0)$$

$$(\text{Log}(1+z) - l(z))' = \frac{1}{1+z} - \frac{1}{1+z} = 0$$

לכן,

$$\text{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

הבעיה עם טורי חזקות היא שתחום ההתכנסות הוא דיסק. אז למשל ב- Log אנחנו לא יכולים להסתכל על נקודות בחצי מישור הימני כי סביבה שתכיל אותן תיגע בראשית ושמ- Log לא מוגדר. אבל זה מה יש.

$$e^{\alpha \text{Log}(1+z)} = (1+z)^\alpha \quad 4.$$

עבור $|z| < 1$:

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

שפת התחום:

משפט Tauber. נניח $n|c_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ונניח ש- $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ מקיימת שקיים הגבול:

$$\lim_{\mathbb{R} \ni x \rightarrow 1^-} f(x) = L$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = L \text{ אזי}$$

רמז: $f(z_n) = 1 - \frac{1}{n}$ כאשר $z_n = 1 - \frac{1}{n}$.

משפט. $Abel$ נניח $\sum c_n$ מתכנס. נסמן $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ אזי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \sum c_n$$

אם $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ באופן "לא משיק" כלומר:

$$\sup_n \frac{|z_n - 1|}{1 - |z_n|} < \infty$$