

אלגוריתמי קירוב ובעיית ה-TSP

- בהינתן בעיית מקסימיזציה, אלגוריתם A הוא c -קירוב אם לכל קלט x מתקיים $A(x) \geq \frac{\text{OPT}(x)}{c}$.
- בהינתן בעיית מינימיזציה, אלגוריתם A הוא c -קירוב אם לכל קלט x מתקיים $A(x) \leq c \cdot \text{OPT}(x)$.

בעיית הסוכן הנוסע – TSP

בהינתן גרף K_n ופונקציית משקל $w: E(K_n) \rightarrow \mathbb{R}^+$, מצא מעגל המילטוני ממשקל מינימלי. בעיית ההכרעה המתאימה היא NP-קשה.

טענה: נניח שקיים אלגוריתם c -קירוב לבעיית TSP עבור c קבוע כלשהו. אזי $P=NP$. ההוכחה בתרגיל הבית.

בעיית TSP עם אי-שוויון המשולש

כמו TSP רגיל, עם ההגבלה שלכל x, y, z צמתים, $w(x, z) \leq w(x, y) + w(y, z)$.

באופן כללי, לכל מסלול $x_1, \dots, x_n$ מתקיים $w(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} w(x_i, x_{i+1})$.

אלגוריתם 2-קירוב לבעיית TSP עם אי-שוויון המשולש (בהינתן גרף K_n ופונקציית משקל w):

1. נמצא עץ פורש מינימלי בגרף T .
2. נכפיל כל קשת בעץ לקבלת מולטי-גרף T' . אזי T' קשיר, ודרגת כל צומת זוגית, ולכן ב- T' יש מעגל אוילריאני.
3. נמצא את מעגל אוילר זה (בעזרת DFS).
4. נלך לאורך המעגל האוילריאני, נקפוץ מעל צמתים בהם כבר ביקרנו (פרט לשלב האחרון בו סוגרים את המעגל).

נכונות:

קפיצות לא מעלות את המחיר (בגלל אי-שוויון המשולש). בפרט, מחיר מעגל ההמילטון שנקבל הוא לכל היותר משקל T' . כמו כן, $w(T') = 2 \cdot w(T)$.

כל מעגל המילטוני (בפרט OPT) מכיל מסלול המילטוני (מסלול המילטוני הוא בפרט עץ פורש), ולפיכך משקלו לפחות כמשקל עץ פורש, כלומר משקל T .

קיבלנו: $\left(\begin{matrix} \text{משקל הסיור} \\ \text{שקיבלנו} \end{matrix} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{matrix} \text{משקל מעגל} \\ \text{המילטון מינימלי} \end{matrix} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot \text{משקל } T$, כלומר משקל הסיור שמתקבל חסום על ידי $2 \cdot \text{OPT}$, כלומר זהו 2-קירוב.

אלגוריתם 3/2-קירוב לבעיית TSP עם אי-שוויון המשולש

הרעיון: לבנות מעגל אוילר זול יותר, ובכך לקבל קירוב טוב יותר.

הגדרה: **שידוך** (זיווג) בגרף הוא אוסף קשתות שאין להן צומת משותף. **שידוך מושלם** הוא שידוך שמכסה את כל הצמתים בגרף.

בגרף עם מספר זוגי של צמתים קיים תמיד שידוך מושלם, ויש אלגוריתם שמוצא שידוך מושלם ממשקל מינימלי בזמן פולינומי.

האלגוריתם:

1. נמצא עץ פורש מינימלי T .
2. תהי O קבוצת הצמתים מדרגה אי-זוגית.
3. נמצא שידוך מושלם מינימלי M ב- O .
4. מקבלים ש- $T \cup M$ הוא גרף בו לכל צומת יש דרגה זוגית. נמצא בו מעגל אוילר, ונמשיך באותו אופן כמו קודם.

נכונות:

נשים לב שבכל גרף (ובפרט ב- T), סכום הדרגות של כלל הצמתים הוא פעמיים מספר הקשתות. לכן, מספר הצמתים מדרגה אי-זוגית הוא זוגי, כלומר $|O|$ זוגי.

כל מעגל המילטוני על מספר זוגי של צמתים ניתן לפירוק לשני זיווגים מושלמים. לכן, $\frac{1}{2} \cdot \left(\begin{matrix} \text{משקל זיווג מושלם} \\ \text{מינימלי ב-} O \end{matrix} \right) \geq \left(\begin{matrix} \text{משקל מעגל המילטוני} \\ \text{מינימלי ב-} O \end{matrix} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{matrix} \text{משקל מעגל המילטון מינימלי} \\ \text{ב-} O \end{matrix} \right)$.

נשים לב שממשקל מעגל המילטון מינימלי ב- O הוא לכל היותר משקל מעגל המילטון מינימלי בגרף המקורי, היות וכל מעגל בגרף המקורי ניתן להפוך למעגל ב- O על ידי קפיצות (ושימוש באי-שוויון המשולש).

$$\underbrace{w(T \cup M)}_{\substack{\text{מחיר המעגל} \\ \text{באלגוריתם}}} \leq w(T) + w(M) \leq w(\text{OPT}) + \frac{1}{2} \cdot w(\text{OPT}) = \frac{3}{2} \cdot w(\text{OPT}) \quad \text{נקבל:}$$

במילים אחרות, קיבלנו $\frac{3}{2}$ -קירוב.