

לינאריות התוחלת

לכל $X_1, \dots, X_n$ מ"מ, מתקיים $E[X_1] + \dots + E[X_n] = E[X_1 + \dots + X_n]$.

1. יהי φ פסוק 3SAT עם m הסגרים, בכל הסגר 3 משתנים שונים (פסוק E3SAT). נוכיח כי קיימת השמה ל- φ המספקת לפחות $\frac{7}{8}m$ הסגרים.

הוכחה: נגדיל השמה מקרית, כל משתנה יקבל T או F בהסתברות $\frac{1}{2}$ באופן ב"ת. נסמן לכל $1 \leq i \leq m$ ב- X_i את המשתנה האינדיקטור למאורע שההסגר ה- i מסופק, כלומר:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{ההסגר ה-} i \text{ מסופק} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

לכל הסגר ספציפי, ההסתברות שהוא לא מסופק היא $\frac{1}{8}$. לכן, $E[X_i] = \frac{7}{8}$. נסמן ב- X את מספר

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^m X_i\right] = \sum_{i=1}^m E[X_i] = \frac{7}{8}m$$

בכל הגרלה קיימת בחירה של המשתנים כך ש- X הוא לפחות כמו התוחלת שלו. לכן, קיימת השמה שבה יש לפחות $\frac{7}{8}m$ הסגרים מסופקים.

2. יהי G גרף לא מכוון עם m קשתות. חתך ב- G הוא חלוקה של הצמתים לשתי קבוצות. גודל החתך הוא מספר הקשתות שמחברות צומת מצד א' של החתך לצומת מצד ב' של החתך.

נטען: מתקיים תמיד: $\text{MAX-CUT}(G) \geq \frac{m}{2}$.

הערה: בעיית MAX-CUT היא NP-קשה.

הוכחה: בהינתן G , נגדיל כל צומת להיות בצד א' או בצד ב' בהסתברות $\frac{1}{2}$ באופן ב"ת. לכל

קשת e , יהי X_e המ"מ האינדיקטור למאורע ש- e בחתך. אזי $E[X_e] = \frac{1}{2}$, ולכן

$$E\left[\sum_{e \in E(G)} X_e\right] = \sum_{e \in E(G)} E[X_e] = \frac{m}{2}$$

דה רנדומיזציה

שיטה א': שיטת התוחלת המותנה

טענה: בהינתן גרף G על צמתים $x_1, \dots, x_n$, נניח שקבענו עבור חלק מהצמתים באיזה צד של החתך הם נמצאים. ניתן לחשב בזמן פולינומי את תוחלת גודל החתך שיתקבל אם נגדיל את שאר הצמתים באופן ב"ת.

הוכחה:

עוברים על כל הקשתות וסוכמים לתוחלת את תוחלת המשתנה האינדיקטור עבור כל קשת. לכל קשת שלוש אפשרויות:

1. שני הצמתים הסמוכים לה כבר נקבעו: במקרה זה, הקשת תורמת בוודאות 1 או 0 לגודל החתך.

2. שני הצמתים הסמוכים לה לא נקבעו: כמו קודם, קשת זו תורמת $\frac{1}{2}$ לתוחלת.

3. בדיוק צד אחד נקבע: ההסתברות שהקשת תהיה בחתך היא $\frac{1}{2}$. לכן, קשת זו

תתרום גם כן $\frac{1}{2}$.

תיאור האלגוריתם:

לכל $1 \leq i \leq n$:

נחשב בעזרת האלגוריתם הנ"ל את תוחלת גודל החתך אם x_i יהיה בצד א', ואת תוחלת גודל החתך אם x_i יהיה בצד ב'.
נבחר ל- x_i צד שלא מוריד את גודל התוחלת המקורית.

$$E \left[\begin{array}{c} \text{גודל החתך} \\ \text{בשלב כלשהו} \\ \text{לפני שקובעים} \\ x_i - l \end{array} \right] = \frac{E \left[\begin{array}{c} \text{גודל החתך} \\ \text{אם } x_i \text{ בצד א} \end{array} \right] + E \left[\begin{array}{c} \text{גודל החתך} \\ \text{אם } x_i \text{ בצד ב} \end{array} \right]}{2} \quad \text{אז:}$$

בסיום הריצה, נקבל חתך (קבענו לכל הצמתים צד) שגודלו לפחות $\frac{m}{2}$.

שיטה ב': מרחבי מדגם קטנים

הגדרה: עבור מ"מ $X_1, \dots, X_n$, נאמר שהם **k-ב"ת** (k -wise-independent), אם כל קבוצה של k מתוכם ב"ת.

דוגמה: שימוש ל-MAX-CUT:

בהוכחה שקיים חתך שגודלו $\frac{m}{2}$, לא היינו צריכים באמת אי-תלות מלאה בין כל הקשתות.

מספיק לדרוש שבחירת הצדדים לצמתים תהיה 2-ב"ת, ואז ההסתברות של כל קשת

להיות בחתך היא $\frac{1}{2}$, ומשם באותו אופן, מקבלים שתוחלת גודל החתך היא $\frac{m}{2}$.

למה קיימים מרחבים k-ב"ת?

קיימת התפלגות על $X_1, \dots, X_n$, $X_i \in \{0, 1\}$, שהיא k-ב"ת, וגודלה $O\left(n^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor}\right)$.

נתאר בנייה עבור $k=2$:

בניה:

יהיו $Y_1, \dots, Y_{\log n}$ מ"מ שמקבלים 0 או 1 בהסתברות $\frac{1}{2}$ באופן ב"ת.

לכל $S \subseteq \{1, \dots, \log n\}$, $S \neq \emptyset$, נגדיר $X_S = \left(\sum_{Y \in S} Y \right) \bmod 2$.

נכונות: המ"מ הם ב"ת בזוגות.

עבור שתי קבוצות $S \neq T$, מתקיים:

$$\Pr[X_S = X_T] = \Pr[X_S + X_T = 0 \pmod{2}] = \Pr\left[\sum_{Y \in S \Delta T} Y = 0 \pmod{2}\right] = \frac{1}{2}$$

בשיעורי הבית נוכיח: $\text{MAX-CUT}(G) \geq \frac{m}{2} + \Omega(\sqrt{m})$.