

. $NL = NSpace(\log n)$

משפט: $stCon$ שלמה ב- NL.

משפט *Savitch*: $NL \subseteq Space(\log^2 n)$.

משפט אימרמן: $NL = coNL$.

2SAT

משפט: $\overline{2SAT}$ היא NL-שלמה.

הוכחה:

שלב I: $\overline{2SAT} \in NL$.

בהינתן פסוק φ מסוג 2CNF על המשתנים $x_1, \dots, x_n$, נגדיר את הגרף G הבא:

לכל הסגר מהצורה $(u \vee w)$, נחבר את $\bar{u}$ ל- w ואת $\bar{w}$ ל- u (בקשתות מכוונות).

הרעיון: אם יש מסלול מ- u ל- w , אזי אם u הוא T בכל השמה מספקת, גם w חייב להיות T .

טענה: ל- φ אין השמה מספקת אם ורק אם קיים i עבורו יש מסלול מכוון מ- x_i ל- $\bar{x}_i$, וגם יש מסלול מכוון מ- $\bar{x}_i$ ל- x_i .

תחילה, נניח את נכונות הטענה, ונראה כיצד נובע כי $\overline{2SAT} \in NL$.

בהינתן קלט φ , ננחש i , וננסה לנחש מסלול באורך לכל היותר $2n$ מ- x_i ל- $\bar{x}_i$ ומ- $\bar{x}_i$ ל- x_i .

אם מצאנו זוג מסלולים כנ"ל, נקבל. אחרת, נדחה.

הערה: אין צורך לבנות באופן מפורש את הגרף כדי לבצע סיורים עליו. לכן, נדרש $O(\log n)$ זיכרון.

הוכחת הטענה:

אם יש מסלול מ- x_i ל- $\bar{x}_i$ ומ- $\bar{x}_i$ ל- x_i עבור i כלשהו, בכל השמה מספקת ל- φ :

אם x_i הוא T , אזי $\bar{x}_i$ הוא T .

אם $\bar{x}_i$ הוא T , אזי x_i הוא T .

לכן, אין השמה מספקת ל- φ .

אם לכל i אין מסלול מ- x_i ל- $\bar{x}_i$ או אין מסלול מ- $\bar{x}_i$ ל- x_i , נבנה את ההשמה בשלבים,

בכל שלב נבחר משתנה x_i שלא קיבל ערך. נסמן ב- u את הצומת (או המשתנה) מבין

$\{x_i, \bar{x}_i\}$ עבורו לא קיים מסלול מ- u ל- $\bar{u}$. ניתן ל- u ערך T .

נשים לב: אם ב- G יש מסלול מ- x ל- y , אזי יש גם מסלול מ- $\bar{y}$ ל- $\bar{x}$.

כל ליטרל שנגיש מ- u יקבל T , וההופכי של כל ליטרל שקיבל T יקבל F .

שתי סוגי סתירות עלולות להיווצר:

1. לא ייתכן שיש מסלול גם מ- u ל- w וגם מ- u ל- $\bar{w}$.

2. לא ייתכן שמשנתה יקבל ערכים סותרים בשלבים שונים.

שלב II: נרצה להוכיח ש- $\overline{2SAT}$ היא NL-שלמה.

נראה $\overline{2SAT} \leq_{stCon}$:

בהינתן גרף מכוון ושני צמתים s, t , נגדיר פסוק ψ באופן הבא:

$$\psi = (s \vee t) \wedge (\bar{s} \vee \bar{t}) \wedge \left(\bigwedge_{(u,w) \in \vec{E}(G)} (\bar{u} \vee w) \right)$$

הרדוקציה בזיכרון לוגריתמי:

ניתן למצוא כל חלק בפלט הרדוקציה (למשל לבדוק האם הסדר ספציפי קיים)

בזיכרון לוגריתמי.

נכונות:

אם יש השמה מספקת ל- ψ , s חייב להיות T , ו- t חייב להיות F . בנוסף, כל

צומת שנגיש מ- s חייב להיות T , ולכן t לא נגיש מ- s , כלומר אין מסלול מכוון

מ- s ל- t .

אם אין מסלול מ- s ל- t : ניתן ערך T לכל המשתנים הנגישים מ- s ו- F לכל

האחרים. שני ההסגרים הראשונים כמובן מסתפקים, ולכל הסגר אחר מהצורה

$\bar{u} \vee w$: אם הוא לא מסתפק, אזי $u = T$ ו- $w = F$, ולכן u נגיש מ- s ו- w לא.

סתירה, כי היות ו- (u, w) קשת, w נגיש מ- s דרך u .

מש"ל.

מסקנה (ממשפט אימרמן): $2SAT$ היא NL-שלמה.

בעיות נוספות

1. בהינתן גרף מכוון ושני צמתים s, t , האם קיימים בדיוק 3 מסלולים מכוונים שונים מ- s ל- t ? הבעיה ב-NL.

2. בהינתן גרף על n צמתים, האם קיים בו מסלול מכוון פשוט באורך לפחות $\frac{n}{2}$?

3. בהינתן גרף, האם יש בו קליק בגודל 3007?