

### תרגול 3 - 09.03.2010

הודעה: בודק תרגילים: יובל רוכמן. מספר התא יישלח באימייל.  
הגדרות:

- $\text{Ntime}(n^k)$  היא מחלקת כל השפות עבורן קיימת מ"ט לא דטרמיניסטית שמכריעה אותן בזמן  $O(n^k)$ .
- $\text{NP} = \bigcup_{k \geq 1} \text{Ntime}(n^k)$ .
- נגדיר בנוסף  $\text{EXP} = \bigcup_{k \geq 1} \text{Time}(2^{n^k})$  ו-  $\text{NEXP} = \bigcup_{k \geq 1} \text{Ntime}(2^{n^k})$ .

#### הכרעה לעומת חיפוש

נניח שיש אורקל  $A$  שבהינתן גרף, מכריע האם הוא 4-צביע בזמן פולינומי. נרצה למצוא אלגוריתם פולינומי  $A^*$  שמוצא 4-צביעה לגרף שיש בו צביעה כזו.

בהינתן גרף  $G$ , יהי  $G'$  הגרף המתקבל מ- $G$  על ידי הוספת קליק  $K_4$ . עוברים על כל הצמתים המקוריים (לא כולל ה- $K_4$  שהוספנו) אחד אחרי השני. בצומת  $v$  מתאים, נגדיר את הגרפים:

$$\begin{aligned} G_1 &= (V(G'), E(G') \cup \{v_2, v_3, v_4\}) \\ G_2 &= (V(G'), E(G') \cup \{v_1, v_3, v_4\}) \\ G_3 &= (V(G'), E(G') \cup \{v_1, v_2, v_4\}) \\ G_4 &= (V(G'), E(G') \cup \{v_1, v_2, v_3\}) \end{aligned}$$

#### האלגוריתם:

- בהתחלה, בודקים בעזרת  $A$  ש- $G$  הוא 4-צביע.
- מסדרים את הצמתים לפי סדר:  $v_1, \dots, v_n$ .
- לאחר השלב ה- $i$ ,  $G^i$  עדיין 4-צביע.
- מריצים את האורקל  $A$  לבחירת צבע  $j$  ל- $v_i$  כך שהגרף  $G^j$  הוא 4-צביע.
- בסיום, מקבלים 4-צביעה חוקית לכל צמתי  $G'$  (ו- $G$ ).

#### The padding argument

טענה:  $P \neq \text{NP} \Leftrightarrow \text{EXP} \neq \text{NEXP}$ .

די להראות שאם  $P = \text{NP}$ , אזי  $\text{EXP} = \text{NEXP}$ .

תהי  $L \in \text{NEXP}$ . אזי קיימת מ"ט לא דטרמיניסטית  $M$  שמכריעה את  $L$  בזמן  $2^{p(n)}$ , עבור פולינום

$p$ . נגדיר שפה חדשה  $L'$  באופן הבא:  $L' = \{x \# 1^t \mid x \in L, t = 2^{p(|x|)}\}$ . נטען ש- $L' \in \text{NP}$ .

נבנה במכונה פולינומית לא דטרמיניסטית שמכריעה את  $L'$ . על קלט  $y$ , מוודאים שהוא מהצורה  $y = x \# 1^t$ , ובודקים שמספר ה-1 ימים מקיים  $t = 2^{p(|x|)}$ . בדיקה זו מתקיימת בזמן פולינומי ב- $t$  (וב- $|y|$ ).

אם מספר ה-1 ימים לא נכון, דוחים. אם הוא נכון, מריצים את  $M$  על  $x$ , ומקבלים או דוחים בהתאמה.

זמן הריצה הכולל:  $\text{poly}(|y|) + 2^{p(|x|)} = \text{poly}(|y|)$ .

לכן,  $L' \in \text{NP}$ , ולכן לפי ההנחה  $L' \in P$ .

לכן, קיימת מכונה  $M'$  שמכריעה את  $L'$  בזמן פולינומי. כדי להראות ש- $L \in \text{EXP}$ , בהינתן קלט  $x$ , נרפד אותו לקלט  $y$  שהוא "מועמד חוקי" ל- $L'$ ,  $|y| = \Theta(2^{p(|x|)})$ . נריץ על  $y$  את  $M'$ , ונקבל הכרעה של  $L$  בזמן  $\text{EXP}(|x|) = \text{POLY}(|y|)$ .

#### שפות דלילות ב-NP

תהי  $L$  שפה המקיימת: לכל  $n \geq 496$  מתקיים  $|L \cap \{0,1\}^n| = 2n^4 + 9$ . הוכיחו כי  $L \in \text{coNP}$ .

סקיצת ההוכחה: נראה ש- $\bar{L} \in \text{NP}$ . לכל  $n \geq 496$ , יש רשימה באורך  $2n^4 + 9$   $w_1, \dots, w_t$  שהם המילים היחידות באורך  $n$  הזוהב- $L$ . ה"הוכחה" ש- $x \notin L$  תהיה רשימת כל המילים הללו, כאשר לכל  $w_i \in L$  מצרפים את ההוכחה ש- $w_i \in L$ . כדי לוודא ש- $x \notin L$ , מוודאים שכל המילים  $w_i \in L$  וש- $x$  אינו שווה לאף אחת מהן.