

סיבוכיות זיכרון

הגדרות:

סיבוכיות זיכרון תוגדר על מ"ט עם שלושה סרטים:

- סרט קלט לקריאה בלבד.
- סרט עבודה לקריאה וכתיבה, מוגבל בזיכרון.
- סרט פלט לכתיבה בלבד.

נאמר שמכונה **משתמש בזיכרון** $f(n)$ אם לקלט באורך n לא משתמשים ביותר מ- $f(n)$ מקום על סרט העבודה.

$\text{SPACE}(f(n))$ - אוסף השפות להן קיימת מ"ט כנ"ל עם זיכרון $f(n)$.

אורקלים: בהינתן שפה $O \subseteq I^*$, M^O היא מ"ט עם סרט נוסף שניתן לכתוב עליו קלט x , וביחידת זמן אחת מוחזר האם $x \in O$ או לא.

בהינתן מחלקת סיבוכיות A , A^O הוא אוסף כל השפות שניתנות להכרעה על ידי M^O , כאשר $L(M) \in A$.
משפט ההיררכיה

טענה: קיימת מ"ט אוניברסלית M עם התכונה הבאה: בהינתן קלט מ"ט M^* שרצה בזמן $f(n)$ וקלט x , M מסמלצת את ההרצה של M^* על x תוך שימוש בזיכרון $c \cdot f(|x|)$ (c קבוע).

משפט: לכל אורקל O ולכל שתי פונקציות נורמליות $f(n), g(n)$ כך ש- $f(n) = \omega(g(n))$ מתקיים $\text{SPACE}(g(n))^O \subsetneq \text{SPACE}(f(n))^O$.

נראה מקרה פרטי: $\text{SPACE}(n^2)^O \subsetneq \text{SPACE}(n^3)^O$.

נגדיר מ"ט D באופן הבא: על קלט x , תהי M_x מ"ט שקידודה x (עם אורקל O). D תריץ את M_x על x במשך $|x|^{2.9}$ זיכרון (כלומר, לא חוצים בסרטי העבודה את גבול הזיכרון הזה).

אם M_x עצרה על x במהלך השימוש בזיכרון זה, D תענה הפוך, כלומר $D(x) = 1 - M_x(x)$. אם M_x לא עצרה, D תחזיר 0.

מצד אחד, קל לראות כי $L(D) \in \text{SPACE}(n^3)^O$.

נראה ש- $L(D) \notin \text{SPACE}(n^2)^O$: נניח בשלילה שיש מ"ט M' שרצה בזיכרון αn^2 ומכריעה את $L(D)$. בה"כ, ניתן להניח של- M' קידוד ארוך כרצוננו. כאשר מריצים את M' על $\langle M' \rangle$:

M' עוצרת תוך $\|M'\|^{2.9} \ll \alpha \|M'\|^2$ זיכרון. אבל אז, נקבל $\langle M' \rangle \neq M'(\langle M' \rangle)$, ולכן $L(M') \neq L(D)$, כמבוקש. מש"ל.

stConn

קלט: גרף מכוון $G = (V, E)$ על n צמתים, ושני צמתים s, t .
שאלה: האם קיים מסלול (מכוון) בין s ל- t ?

נראה $\text{stConn} \in \text{SPACE}(\log^2 n)$.

האלגוריתם: נראה, בהינתן שני צמתים u, v אלגוריתם הבודק האם יש מסלול באורך לכל היותר d בין u ל- v :

1. אם $d = 1$, בודקים אם יש קשת מ- u ל- v .

2. אם $d > 1$, עוברים על כל הצמתים w בגרף, ולכל אחד מהם בודקים האם יש מסלול באורך $\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil$ בין u ל- w ובין w ל- v .

כל איטרציה לוקחת $O(\log n)$ זיכרון. עומק הרקורסיה הוא לכל היותר $\log n$ (בכל שלב d קטן פי 2). בסך הכל, נדרש $O(\log^2 n)$ זיכרון.