

פתרון שאלה 2 מתרגיל 5

הבעיה: תן אלגוריתם עם קירוב טוב מ-2 ל-VC לגרפים r -רגולריים, כאשר r קבוע.

מספר הקשתות בגרף r -רגולרי עם n צמתים הוא $\frac{r \cdot n}{2}$.

כל צומת בכיסוי מכסה r קשתות, לכן גודל הכיסוי המינימלי הוא לפחות $\frac{n}{2}$.

נמצא צביעה לגרף עם $r+1$ צבעים כך שכל שני צמתים סמוכים מקבלים צבעים שונים.

ניקח את r מחלקות הצבע הקטנות ביותר - הן מהוות כיסוי לגרף שגודלו לכל היותר $\frac{r}{r+1} \cdot n$.

קיבלנו קירוב $\frac{2r}{r+1}$, כמבוקש.

המטרה: להוכיח שלא ניתן לקרב את IS בכל פקטור קבוע. לשם כך, נגדיר בעיה חדשה, CSG.

הגדרה: הבעיה k -CSG

קלט:

גרף G על n צמתים עם קשת בין כל זוג צמתים.

כמו כן, נתונה קבוצת צבעים Σ , $|\Sigma|=k$.

לכל זוג צמתים $u, v \in V(G)$, מוגדר אוסף אילוצים מתוך $\Sigma \times \Sigma$.

אוסף האילוצים מוגדר על ידי פונקציה $f: E(G) \rightarrow P(\Sigma \times \Sigma)$.

המטרה:

למצוא צביעה $\varphi: V(G) \rightarrow \Sigma \cup \{\perp\}$, כך שכמה שיותר צבעים יקבלו צבע מ- Σ .

ולכל $u, v \in V(G)$ אם $\varphi(u), \varphi(v) \in \Sigma$ אזי מתקיים $\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle \in f(u, v)$.

$\text{Gap-}k\text{CSG}[a, b]$ - בעיית ההכרעה לשאלה: "האם בגרף כנ"ל עם $|\Sigma|=k$ ניתן לצבוע b -חלק מהצמתים, או כל צביעה חוקית צובעת לכל היותר a -חלק מהצמתים?".

דוגמאות:

- בעיית k -צביעת הגרפים. $|\Sigma|=k$, לכל שני צמתים לא שכנים, אוסף האילוצים המותר הוא $\Sigma \times \Sigma$, ולכל שני צמתים סמוכים, אוסף האילוצים המותר הוא $\{(i, j) | i \neq j\}$.

- IS - אפשר עם צבע יחיד.

- 3SAT:

כל צומת ייצג הסגר.

$\Sigma = \{1, 2, 3\}$.

לכל שני הסגרים שלא מכילים משתנה משותף, קבוצת האילוצים המותרת היא $\Sigma \times \Sigma$.

האילוצים בין כל שני הסגרים המכילים משתנים משותפים יהיו כאלה שימנעו סתירה.

הסגר יצבע בצבע i אם הליטרל ה- i מספק אותו.

מסקנה: $\text{Gap-}k\text{CSG}\left[\frac{7}{8} + \epsilon, 1\right]$ היא NP-קשה (כי Gap-3SAT מקרה פרטי שלה).

טענות:

$$\text{Gap-}k\text{CSG}[\alpha, \beta] \leq \text{Gap-IS}\left[\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}\right]. \quad 1.$$

נבנה רדוקציה באופן הבא:

גרף מלא G עם n צמתים ואילוצים מתוך א"ב בגודל k יעברו לגרף G' עם $k \cdot n$ צמתים:

1. כל צומת ב- G יעבור לקלסטר צמתים $v_1, \dots, v_k$ כאשר $v_1, \dots, v_k$ מהווים קליק.

2. לכל שני צמתים $u, v \in V(G)$ כך ש- $\langle i, j \rangle \notin f(u, v)$, נחבר קשת בין u_i ל- v_j .
נכונות:

אם ב- G קיימת צביעה $\varphi: V(G) \rightarrow \Sigma \cup \{\perp\}$, כך ש- β -חלק מהצמתים מקבלים צבע מ- Σ , לכל $v \in V(G)$ שקיבל צבע מ- Σ , נבחר את $v_i \in V(G')$ להיות ב- IS. בחרנו

צומת אחד לכל היותר מכל קלסטר ללא הפרת איסורים, ולכן גודל ה- IS הוא $\frac{\beta \cdot n}{n \cdot k} = \frac{\beta}{k}$.

אם ב- G' יש IS בגודל $\alpha \cdot n$, אלה הם $\alpha \cdot n$ צמתים מקלסטרים שונים. נגדיר צביעה ל- G באופן הבא: לכל צומת v , אם אחד מהצמתים בקלסטר שלו, v_i נבחר ל- IS, נצבע את v ב- i . אחרת, נצבע את v ב- $\perp$. ניתן לראות שצביעה זו צובעת α -חלק מהצמתים.

2. לכל $\ell \geq 1$ טבעי, $\text{Gap-}k \text{ CSG}[\alpha, \beta] \leq_p \text{Gap-}k^\ell \text{ CSG}[\alpha^\ell, \beta^\ell]$.

$$\text{Gap-E3SAT}\left[\frac{7}{8} + \varepsilon, 1\right] \leq \text{Gap-3CSG}\left[\frac{7}{8} + \varepsilon, 1\right] \stackrel{(2)}{\leq} \text{Gap-3}^\ell \text{ CSG}\left[\left(\frac{7}{8} + \varepsilon\right)^\ell, 1\right] \stackrel{(1)}{\leq} \text{Gap-IS}\left[\left(\frac{\frac{7}{8} + \varepsilon}{3}\right)^\ell, \left(\frac{1}{3}\right)^\ell\right]$$

לכן, קשה לקרב את IS בפקטור טוב מ- $\frac{1}{\left(\frac{7}{8} + \varepsilon\right)^\ell}$ לכל $\varepsilon > 0$. לכן, לא ניתן לקרב את IS בכל פקטור קבוע.