

בעיות GAP וקושי הקירוב

בעיות פער (GAP)

בהינתן בעיית מקסימיזציה/מינימיזציה A , יש להכריע עבור קלט x האם $\text{OPT}_A(x) \geq \beta$ או $\text{OPT}_A(x) \leq \alpha$ (ניתן להניח שמתקיים $\alpha < \text{OPT}_A(x) < \beta$, כי אם $\alpha = \beta$, זו בעיית הכרעה רגילה).

טענה: תהי A בעיית מינימיזציה עבורה $\text{Gap-A}[\alpha, \beta]$ היא NP-קשה. אזי NP-קשה לקרב את A בפקטור $\frac{\beta}{\alpha} - \varepsilon$ לכל $\varepsilon > 0$.

נניח בשלילה שקיים אלגוריתם S שמהווה $\frac{\beta}{\alpha} - \varepsilon$ -קירוב ל- A . נכריע את $\text{Gap-A}[\alpha, \beta]$ באופן הבא:

בהינתן קלט x , נריץ את S על x ונבדוק את ערך הפתרון שמתקבל. אם ערך הפתרון קטן מ- β , נאמר ש- $\text{OPT}_A(x) \leq \alpha$, ואחרת נאמר ש- $\text{OPT}_A(x) \geq \beta$.

נכונות:

אם $\text{OPT}_A(x) \leq \alpha$, אזי S יחזיר פתרון שערכו לכל היותר $\left(\frac{\beta}{\alpha} - \varepsilon\right) \cdot \alpha < \beta$.
אם $\text{OPT}_A(x) \geq \beta$, כל אלגוריתם יחזיר פתרון שערכו לפחות β .
לכן, נקבל הכרעה ל- $\text{Gap-A}[\alpha, \beta]$ בסתירה.

משפט ה-PCP (גרסת קושי-קירוב): לכל $\varepsilon > 0$ הבעיה $\text{Gap-E3SAT}\left[\frac{7}{8} + \varepsilon, 1\right]$ היא NP-קשה.
בכל הסגר 3 משתנים שונים

בעיית MAX-2SAT

נראה רדוקציה מבעיית $\text{Gap-E3SAT}\left[\frac{7}{8} + \varepsilon, 1\right]$ לבעיית $\text{Gap-2SAT}[\alpha, \beta]$ עבור ערכי α, β כלשהם. בהינתן פסוק 3CNF φ עם m הסגרים, נבנה פסוק 2CNF φ' עם $10m$ הסגרים.

$$\varphi: x \vee y \vee z \quad \varphi': (x)(y)(z)(w)(\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{y} \vee \bar{z})(\bar{w} \vee x)(\bar{w} \vee y)(\bar{w} \vee z)$$

- w הוא משתנה שונה בין כל זוג עשריות.
- התפקידים של x, y, z סימטריים.

נכונות:

נניח שיש השמה שבה אף אחד מהליטרלים x, y, z אינו מסתפק. עבור בחירת $w = F$, מסתפקים 6 הסגרים ב- φ' , ולא יותר.

נניח שבדיוק אחד מתוך x, y, z מסתפקים. עבור בחירת $w = F$, מסתפקים 7 הסגרים ב- φ' ולא יותר.

נניח ששניים מתוך x, y, z מסתפקים. לכל בחירה של w , בדיוק 7 מסתפקים. אם כל הליטרלים של x, t, z מסתפקים, עבור בחירת $w = T$, 7 הסגרים מסתפקים ולא יותר.

אם ב- φ כל m ההסגרים מסתפקים, קיימת השמה ל- φ' בה $7m$ מההסגרים מסתפקים.

אם ב- φ , לכל השמה לכל היותר $\left(\frac{7}{8} + \varepsilon\right) \cdot m$ הסגרים מסתפקים, בכל השמה של φ'

$$\text{מסתפקים לכל היותר } \left(\frac{7}{8} + \varepsilon\right) \cdot m \cdot 7 + \left(\frac{1}{8} - \varepsilon\right) \cdot m \cdot 6 = \frac{55}{8}m + \varepsilon \cdot m$$

לכן, הבעיה $\text{Gap-2SAT}\left[\frac{55}{80} + \varepsilon', \frac{7}{10}\right]$ היא NP-קשה. לכן, לפי הטענה הקודמת, קשה לקרב את

$$\text{MAX-2SAT בפקטור } \frac{56}{55} - \varepsilon = \frac{7}{10} \cdot \frac{80}{55} - \varepsilon \text{ לכל } \varepsilon > 0.$$