

- יהיה בוחן במשקל 15% מהציון הסופי.
- יהיו כנראה 7 תרגילי בית ללא ציון, הגשת 6 מהם חובה.
- אתר הקורס: <http://www.cs.tau.ac.il/~idobene/Complexity10b>

רדוקציות

הגדרה: בהינתן שתי שפות, L_1, L_2 , נאמר ש- L_1 **ניתנת לרדוקציה פולינומית** ל- L_2 מסוג קארפ, ונסמן זאת ב- $L_1 \leq_p L_2$ אם קיימת פונקציה הניתנת לחישוב בזמן פולינומי f כך ש- $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$.
היום נראה $3SAT \leq_p 4NAE \leq_p 3NAE \leq_p 3COL$.

הגדרת הבעיות

פסוק k CNF הוא אוסף של k הסגרי "או", כל אחד מהם בן k ליטרלים.

דוגמה: הסגר $3CNF$: $x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$.

3SAT: בהינתן פסוק $3CNF$, האם קיימת השמה שמספקת את כל ההסגרים בו?

4NAE: בהינתן פסוק $4CNF$, האם קיימת השמה בה בכל הסגר יש לפחות ליטרל אחד שמקבל

T ולפחות ליטרל אחד שמקבל F ?

3NAE: כנ"ל עם פסוקי $3CNF$.

3COL: בהינתן גרף פשוט, האם קיימת צביעה של הצמתים ב-3 צבעים, כל שכל זוג צמתים

שכנים מקבלים צבעים שונים?

רדוקציה I: $3SAT \leq_p 4NAE$.

בהינתן פסוק φ מסוג $3CNF$, נבנה פסוק φ' מסוג $4CNF$. אם φ הוא על המשתנים $x_1, \dots, x_n$, נוסיף ליטרל חדש z לעוד הסגר.

דוגמאות:

φ	φ'
$x_1 \vee x_2 \vee x_3$	$x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee z$
$\bar{x}_1 \vee x_4 \vee \bar{x}_7$	$\bar{x}_1 \vee x_4 \vee \bar{x}_7 \vee z$

הרדוקציה היא בבירור פולינומית.

אם ל- φ יש השמה מספקת, ניתן ל- z ערך F , ונקבל בכל הסגר ב- φ' משתנה אחד עם ערך T ואחד עם ערך F .

אם ל- φ' יש השמה NAE-מספקת: אם z קיבל ערך F , נשמיט אותו ונקבל השמה מספקת ל- φ . אחרת, נשים לב שגם ההשמה ההופכית, בה הופכים את ערכי כל המשתנים, היא גם השמה מספקת. בהשמה זו, z הוא F , ולכן חזרנו למקרה הקודם.

רדוקציה II: $4NAE \leq_p 3NAE$.

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \rightarrow \underbrace{x_1 \vee x_2 \vee z_i}_{\psi} \wedge \underbrace{x_3 \vee x_4 \vee \bar{z}_i}_{\psi'}$$

כל הסגר $4CNF$ עובר לשני הסגרי $3CNF$, בהם מופיע משתנה z_i ייחודי לאותו זוג הסגרים. ברור כי ניתן לבצע את הרדוקציה בזמן פולינומי.

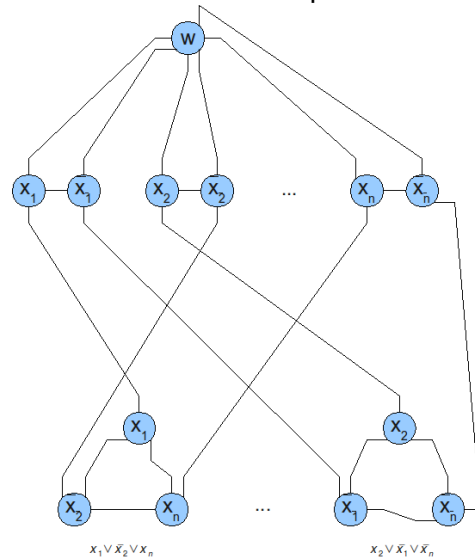
אם ל- ψ יש השמה $3NAE$ -מספקת: עבור הסגר בודד כנ"ל, אם z_i הוא T אזי x_1 או x_2 הם F , ו- x_3 או x_4 הם F . אחרת, z_i הוא F , ואז x_1 או x_2 הם T ו- x_3 או x_4 הם F .
אם ל- ψ יש השמה מספקת: נפריד לארבעה מקרים:

1. אם $x_1 = x_2$ ו- $x_3 = x_4$: במקרה זה, $x_1 \neq x_3$. ניתן ל- z_i ערך הפוך מ- x_1 , וזה יספק את זוג ההסגרים.
2. אם $x_1 = x_2$ ו- $x_3 \neq x_4$: שוב, ניתן ל- z_i ערך הפוך מ- x_1 . ההסגר השני מסתפק בכל מקרה.
3. באופן דומה, אם $x_1 \neq x_2$ ו- $x_3 = x_4$.
4. אם $x_1 \neq x_2$ ו- $x_3 \neq x_4$: שני ההסגרים מסתפקים ללא תלות בהצבת z_i .

רדוקציה III: $3NAE \leq_p 3COL$.

בהינתן פסוק $3NAE$ φ על המשתנים $x_1, \dots, x_n$ ו- m הסגרים:

נבנה את הגרף G הבא:



נקבל גרף עם $3m+2n+1$ צמתים, ולכן הבניה אורכת זמן פולינומי באורך הקלט. אם ל- ψ יש השמה $3NAE$ מספקת: נגדיר את הצביעה הבאה ל- G : נצבע את w בירוק. לכל $1 \leq i \leq n$, אם x_i הוא T , ניתן ל- x_1 בשכבה השנייה צבע כחול ול- $\bar{x}_i$ אדום, אחרת ל- x_i אדום ול- $\bar{x}_i$ כחול. בכל הסגר, ליטרל אחד קיבל T וליטרל שני קיבל F , ולכן בצביעה לכל משולש בשכבה השלישית שכן אחד כחול ושכן אחד אדום. ניתן להשלים זאת לצביעה של כלל המשולש. $\Leftarrow$: נניח בה"כ ש- w צבוע ירוק. אם x_i צבוע בכחול בשכבה השנייה, ניתן לו ערך T , אחרת ניתן לו ערך F . נניח בשלילה שקיים הסגר בו כל הליטרלים קיבלו T (או F). אזי קיים משולש המתאים להסגר שכל שכניו צבועים כחול (אדום). לכן, המשולש עצמו צבוע באדום וירוק בלבד (כחול וירוק). אבל לא ניתן לצבוע משולש ב-2 צבעים. סתירה! לכן, זוהי השמה NAE -מספקת.