W5D3

11/25/14

קוהומולוגית

פרק 7 - צמצום (restriction) וקו-צמצום

① תהי $\Gamma < G$ תת חבורה. A G-מודול אז $A_{Res\,\Gamma}$ (נסמן את A) Γ-מודול.
אז ניתן לבנות 2 סדרות פונקטורים מ-G-מודולים ל-$\mathbb{Z}$-מודולים $H^n(G,\_), H^n(\Gamma,\_{Res\,\Gamma})$. שתי הסדרות הן δ-פונקטורים קוהומולוגיים (סדרה קצרה מדויקת של G-מודולים $\xLeftarrow{\text{צמצום}}$ קצרה מדויקת של Γ-מודולים) מחיקים וקו-מחיקים. (A מנה של G-מודול מושרה M שהוא טריויאלי קוהומולוגית, כלומר $H^n(\Gamma, M_{Res\,\Gamma})=0$).
נרצה למצוא העתקה $H^0(G) \rightleftarrows H^0(\Gamma)$ ונוכל להרחיב ל-H^n כללי.

② נסמן קוסטים $G=\bigcup_{i=1}^{l} s_i\Gamma = \bigcup_{i=1}^{l}\Gamma s_i^{-1}$. לכל $g\in G$ יש תמורה t_g של $\{1,\dots,l\}$ כך ש- $gs_i\Gamma = s_{t_g(i)}\Gamma$ וקיים $\gamma_i(g)\in\Gamma$ כך ש- $gs_i = s_{t_g(i)}\gamma_i(g)$.
מתקיים גם $N_G=\sum_{i=1}^{l} N_\Gamma s_i^{-1}$ ואז נסמן $N_{G/\Gamma}=\sum_{i=1}^{l} s_i$ נקבל $N_G = N_{G/\Gamma}N_\Gamma$. כעת נסתכל על הפונקטורים $A\mapsto H^0(G,A)$ ו- $A\mapsto H^0(\Gamma,A_{Res\,\Gamma})$. א) $A^G\subset A^\Gamma$ ו- $N_GA\subseteq N_\Gamma A$ ולכן נקבל העתקה טבעית $a+N_GA\longmapsto a+N_\Gamma a$. ב) מושרית העתקה $\nu=N_{G/\Gamma}: A^\Gamma\to A^G$ (מושרית מהכפלה).
אכן, לכל $g\in G$, $gN_{G/\Gamma}a=\sum_i gs_ia=N_{G/\Gamma}a$ $(a\in A^\Gamma)$ באופן שאינו תלוי בבחירת s_i, (כי $gN_{G/\Gamma}a=\sum_i s_{t_g(i)}\gamma_i(g)a=\sum_i s_{t_g(i)}a=N_{G/\Gamma}a$) במפורש
$N_{G/\Gamma}N_\Gamma A = N_GA$ ולכן נקבל
העתקה טבעית $c: \frac{A^\Gamma}{N_\Gamma A}\to\frac{A^G}{N_GA}$ ע"י $a+N_\Gamma A\longmapsto N_{G/\Gamma}a+N_Ga$

③ הגדרה

א. צמצום - קיימת סדרה יחידה של העתקות טבעיות
$res^n_{G\to\Gamma}=res^n: H^n(G,A)\to H^n(\Gamma,A)$
המתחלפת עם δ על סדרות קצרות שמוגדר ע"י Γ שראינו קודם ב- res^0.

ב. קו-צמצום סדרה יחידה של העתקות $H^n(\Gamma,A)\to H^n(G,A)$ cor^n שמתחלפת עם δ והיא c ב- $n=0$.

תכונות

א) תהי $\Delta<\Gamma<G$ אז -

(3) א. $res^m_{\Gamma\to\Delta}\, res^m_{G\to\Gamma} = res^m_{G\to\Delta}$

ב. $cor^m_{\Gamma\to G}\, cor^m_{\Delta\to\Gamma} = cor^m_{\Delta\to G}$

ג. ברור כי Γ מושרה מהכלה, ב-0 כי: $N_{G/\Delta} = N_{G/\Gamma} N_{\Gamma/\Delta}$

ד. $res^m_{G\to G} = cor^m_{G\to G} = id$

ה. $res^0_{G\to\Gamma} \mathcal{N}_G(a) = \mathcal{N}_\Gamma(a)$ ו- $cor^0_{\Gamma\to G} \mathcal{N}_\Gamma(a) = \mathcal{N}_G(N_{G/\Gamma}a)$,

בפרט, אם נסמן $\bar{1}_G = \mathcal{N}_G(1) = 1+|G|\mathbb{Z}$ ובדומה $\bar{1}_\Gamma$ אז

$res^0 \bar{1} = \bar{1}_\Gamma$, $cor_\Gamma \bar{1} = (G:\Gamma)\bar{1}_G$.

(4) **משפט**: אם $\Gamma < G$ לכל A G-מודול ולכל $n\in\mathbb{Z}$,

$$cor^n_{\Gamma\to G}\, res^n_{G\to\Gamma} = (G:\Gamma)a$$

הוכחה: שני הצדדים מורפיזמים של δ-פונקטור על H^n,

ולכן מספיק לבדוק ל- $n=0$. אז

$$\frac{A^G}{N_G A} \xrightarrow{\text{מושרה מהכלה}} \frac{A^\Gamma}{N_\Gamma A} \xrightarrow{\text{מושרה מ-}N_{G/\Gamma}} \frac{A^G}{N_G A}$$

$$a+N_G A \longmapsto a+N_\Gamma a \longmapsto \underbrace{N_{G/\Gamma}a}_{(G:\Gamma)a} + N_G A$$

(5) מרכיבים פרימריים וחבורות סילו

(1) **הכנה**: ניקח $|G|=n$ ונפרק לגורמים ראשוניים $p_1^{\mu_1}\cdots p_m^{\mu_m}$.

תהי H חילופית כך ש- $nH=0$. לכל p ראשוני נסמן

$H_p=\{x\in H \mid p^k x=0 \text{ (טבעי) } k\geq 1 \text{ קיים}\}$ אז -

א. $H_p=0$ אם $p\neq p_i\ \forall i$.

ב. $p_i^{\mu_i} H_{p_i}=0$.

ג. $H=\bigoplus_{p\in P} H_p$ המרכיב הפרימרי. נוכיח:

H הוא $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ מודול ו- $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \cong \frac{\mathbb{Z}}{p_1^{\mu_1}\mathbb{Z}}\times\cdots\times\frac{\mathbb{Z}}{p_m^{\mu_m}\mathbb{Z}}$. נסמן $e_i\in\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$

את $(0,\dots,1+p_i^{\mu_i}\mathbb{Z},0,\dots,0)$. אז $e_ie_j=0$ ל- $i\neq j$, $e_i^2=e_i$

$\sum e_i=1$ ו- $p_i^{\mu_i}e_i=0$. לכן $H=\bigoplus_i e_iH$ ו- $e_iH\subset H_{p_i}$.

לבסוף, אם p ראשוני כלשהו, ו- $H_p\neq 0$, קיים $a\neq 0\in H_p$

ולכל $p_i\neq p$ $e_ia=0$ ולכן קיים i יחיד כך ש- $p=p_i$

אז $a=\sum_k e_ka=e_ia\in e_iH$ ולכן גם $H_{p_i}\subset e_iH$.

כעת, א. מיידי כי אין $a\in H_p$ אם $\forall i\ p\neq p_i$,

ב. נעבור ל- $p_i^{\mu_i}e_i=0$ ו-ג' ל- $e_iH=H_{p_i}$ ו- $H=\oplus e_iH$.

הערה אם $\varphi: H_1\to H_2$ $\mathbb{Z}$-הומ' אז $\varphi((H_1)_p)\subseteq(H_2)_p$

2) כעת אם $n=|G|$, לכל G-מודול A $nH^k(G,A)=0$ ולכן
$H^k(G,A)=\bigoplus_p H^k(G,A)_p$ עם התכונות לעיל.

יהי p חזק מסדר μ ב-n. $n=n'\cdot p^\mu$, $\gcd(n',p)=1$ קיימת תת-חבורת סילו
$|G_p|=p^\mu$ מאינדקס $n'=n/p^\mu=(G:G_p)$.

א) נתייחס ל- $res_{G\to G_p}: H^k(G,A)\to H^k(G_p,A)$ וע"י צמצום תחום נקבל
$res: H^k(G,A)_p\to H^k(G_p,A)_p=H^k(G_p,A)$.

ב) נתייחס ל- $cor_{G_p\to G}: H^k(G_p,A)\to H^k(G,A)$ עם תמונה ב- $H^k(G,A)_p$
ולכן ע"י צמצום טווח נקבל $cor: H^k(G_p,A)\to H^k(G,A)_p$.

טענה בסימונים לעיל

א) הסדרה $0\to H(G,A)_p\xrightarrow{res}H^k(G_p,A)$ מדויקת.

ב) כנ"ל ל- $H(G_p,A)\xrightarrow{cor}H(G,A)_p\to 0$.

ג) $H^k(G_p,A)=Im(res)\oplus Ker(cor)$.

הוכחה באופן כללי ל- M,N מודולים מעל R ו- $\psi: N\to M$ ו-
$\varphi: M\to N$ R-הומ' כך ש- $\varphi\psi=id_N$, אז
$0\to N\xrightarrow{\psi}M$ ו- $M\xrightarrow{\varphi}N\to 0$ מדויקות, וכמו כן $Im\psi\cap Ker\varphi=0$.

~~ובנוסף $\varphi(id_M-\psi\varphi)=\varphi-\varphi\psi\varphi=0$ מראה ש- $Im(id_N-\psi\varphi)\subseteq Ker\varphi$~~

~~ולכן מתוך $id=\psi\varphi+(id-\psi\circ\varphi)$ נקבל~~

ובנוסף $\psi(id_M-\varphi\psi)=\psi-\psi=0$ מראה ש- $Im(id_M-\varphi\psi)\subseteq Ker\psi$

ולכן מתוך $id_M=\varphi\psi+(id_M-\varphi\psi)$ נקבל $M=Im\varphi\oplus ker\psi$.

כעת, ראינו ש- $cor\circ res=(G:G_p)=n'$ (בצמצומי תחום/טווח לא משנה)
כלומר, על $H^k(G,A)_p$. קיימים s,t כך ש- $sn'+tp^\mu=1$
ומאחר ש- $tp^\mu H^k(G,A)_p=0$ נקבל $sn'=id$ על
$H^k(G,A)_p$ ולכן $(s\cdot cor)\circ(res)=id_{H^k(G,A)_p}$ ולכן א'-ג' בטענה נובעים
מהא שראינו על M,N כלליים.

6 res^{-1}, cor^{-1} ← לא הוכ', רכ"ב

תזכורת בהגדרת $d_{-1}: C^{-2}(A)\to C^{-1}(A)$, $d_{-1}f=\sum_\sigma(\sigma-1)f(\sigma^{-1})$

ובהגדרת $d_0: a\to N_G a$ ראינו ש-

$H^{-1}(G,A)=\frac{{}_{N_G}A}{I_GA}$. מאחר ש- $N_G=N_{\Gamma\backslash G}N_\Gamma$ נובע ש- ${}_{N_\Gamma}A\subseteq{}_{N_G}A$

אם בנוסף נשתמש בהכלה $\mathbb{Z}[\Gamma]\subseteq\mathbb{Z}[G]$ אז

$I_\Gamma=\bigoplus_{\gamma\in\Gamma,\ \gamma\neq1}\mathbb{Z}(\gamma-1)\subseteq\bigoplus_{\sigma\in G,\ \sigma\neq1}\mathbb{Z}(\sigma-1)=I_G$ ולכן נקבל הומ' מושרה מהכלות

$\frac{{}_{N_\Gamma}A}{I_\Gamma A}\longrightarrow\frac{{}_{N_G}A}{I_GA}$. נרצה ש-

$$\begin{array}{ccc}\frac{{}_{N_\Gamma}A}{I_\Gamma A} & \xrightarrow{\cong} & H^{-1}(\Gamma,A)\\ \downarrow{\scriptstyle\text{לעיל}} & & \downarrow{\scriptstyle cor^{-1}}\\ \frac{{}_{N_G}A}{I_GA} & \xrightarrow{\cong} & H^{-1}(G,A)\end{array}$$

חילופי. נבדוק זאת: תהי $0\to M\to B\to A\to0$ מדויקת

עם B טריוויאלי קוהומולוגית. נקבל תרשים $(m,\ i(m)=N_\Gamma b)$

$$\begin{array}{ccccccc}(a) & \frac{{}_{N_\Gamma}A}{I_\Gamma A} & \xrightarrow{\cong} & H^{-1}(\Gamma,A) & \xrightarrow[\cong]{\delta_\Gamma} & H^0(\Gamma,M)= & \frac{M^\Gamma}{N_\Gamma M}\\ & \downarrow{\scriptstyle\text{מושרה מהכלה}} & & \downarrow{\scriptstyle cor^{-1}}\ {\scriptstyle\text{חילופי כי cor מתחלף עם δ-פונקטור}} & & \downarrow{\scriptstyle cor^{0}}\ {\scriptstyle\text{חילופי מהגדרת cor}} & \downarrow{\scriptstyle N_{\Gamma\backslash G}}\\ (a) & \frac{{}_{N_G}A}{I_GA} & \xrightarrow{\cong} & H^{-1}(G,A) & \xrightarrow[\cong]{\delta_G} & H^0(G,M)\longrightarrow & \frac{M^G}{N_GM}\end{array}$$

לכן די לבדוק שהמלבן חילופי.

$(i(N_{\Gamma\backslash G}m)=N_Gb)$

יהי $a\in{}_{N_\Gamma}A$ נסמן של $\bar a^\Gamma=a+I_\Gamma A\in H^{-1}(\Gamma,A)$ ויהי $b\in B$ עם

$q(b)=a$. אז יש $m\in M$ כך ש- $i(m)=N_\Gamma b$. לכן לאחר

כפל ב- $N_{\Gamma\backslash G}$ נקבל N_Gb, וברור שזה מה שיתקבל

גם בכיוון השני (מעין דומה ל-G).

נסמן $N_{\Gamma\backslash G}=\sum_i s_i^{-1}$. אז $N_G=N_\Gamma N_{\Gamma\backslash G}$ ולכן נקבל ${}_{N_G}A\xrightarrow{N_{\Gamma\backslash G}}{}_{N_\Gamma}A$

ובנוסף מתקיים $N_{\Gamma\backslash G}I_G\subseteq I_\Gamma\mathbb{Z}[G]$ (הכול ב-$\mathbb{Z}[G]$). ואכן,

לכל $\sigma\in G$ קיים $\gamma_i\in\Gamma$ ותמורה t כך ש- $s_i^{-1}\sigma=\gamma_i s_{t(i)}^{-1}$

ולכן $N_{\Gamma\backslash G}(\sigma-1)=\sum_i s_i^{-1}(\sigma-1)$ זה בדיוק $\sum_i\gamma_i s_{t(i)}^{-1}-\sum_i s_{t(i)}^{-1}$ ששווה ל-

$\sum_i\gamma_i s_{t(i)}^{-1}-\sum s_{t(i)}^{-1}=\sum(\gamma_i-1)s_{t(i)}^{-1}\in I_\Gamma\mathbb{Z}[G]$ ולכן נקבל $N_{\Gamma\backslash G}I_GA\subseteq I_\Gamma A$. סה"כ נקבל

$\frac{{}_{N_G}A}{I_GA}\xrightarrow{N_{\Gamma\backslash G}\text{ - מושרה}}\frac{{}_{N_\Gamma}A}{I_\Gamma A}$, טענה - התרשים הבא חילופי

$$\begin{array}{ccc}\frac{{}_{N_G}A}{I_GA} & \xrightarrow{\cong} & H^{-1}(G,A)\\ \downarrow{\scriptstyle N_{\Gamma\backslash G}\text{ - מושרה}} & & \downarrow{\scriptstyle cor^{-1}}\\ \frac{{}_{N_\Gamma}A}{I_\Gamma A} & \xrightarrow{\cong} & H^{-1}(\Gamma,A)\end{array}$$

(הוכחה זהה עם חצים הפוכים)

$\mathrm{cor}^{-2}, \mathrm{res}^{-2}$ (7)

$$\begin{array}{ccc} H^{-2}(G,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & G/G' \\ \downarrow \mathrm{res}^{-2} & & \downarrow V = \text{Verlagerung} \\ H^{-2}(\Gamma,\mathbb{Z}) & \rightarrow & \Gamma/\Gamma' \end{array}$$

<u>טענה</u> - התרשים הבא חילופי

<u>בדיקה</u> - נשתמש ב-I של הסדרות

$$0 \to I_G \to \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0 \quad (\mathrm{I})$$
(עם תרשים חילופי)

$$\uparrow \mathrm{inc.} \qquad \uparrow \mathrm{inc.}$$

$$0 \to I_\Gamma \to \mathbb{Z}[\Gamma] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0 \quad (\mathrm{II})$$

$$\begin{array}{ccccccc} H^{-2}(G,\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\cong]{\delta_1} & H^{-1}(G,I_G) & \xrightarrow{\cong} & \frac{I_G}{I_G^2} \; (= N_G I_G) & \xleftarrow[\cong]{\theta_G} & G/G' \\ \downarrow \mathrm{res}^{-2} & & \downarrow \mathrm{res}^{-1} & & \downarrow N_{\Gamma\backslash G} & & \\ H^{-2}(\Gamma,\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\cong]{\delta_1} & H^{-1}(\Gamma,I_G) & \xrightarrow{\cong} & \frac{N_{\Gamma\backslash G} I_G}{I_\Gamma I_G} & & \downarrow V \\ \updownarrow \mathrm{id} & & \uparrow & & \uparrow \varphi & & \\ H^{-2}(\Gamma,\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\cong]{\delta_1} & H^{-1}(\Gamma,I_\Gamma) & \xrightarrow{\cong} & \frac{I_\Gamma}{I_\Gamma^2} \; (= N_\Gamma I_G) & \xleftarrow{\theta_\Gamma} & \Gamma/\Gamma' \end{array}$$

אל מ-G/G'

חילופי כי res^{-2} res מורפיזם של δ-פונקטורים

בדקנו שחילופי בסוף הקודם

חילופי כי $H^*(\Gamma,-)$ δ-פונקטור

מושרה מהכלה

חילופי מכלל פונקטוריאלי

מושרה

מאחר ש-φ איזו' ודי לבדוק שהמלבן מימין חילופי. כלומר,

ש-$\varphi\circ\theta_\Gamma\circ V = N_{\Gamma\backslash G}\circ\theta_G$: $G/G' \to \frac{N_G I_\Gamma}{I_\Gamma I_G}$. נזכור שסימנו $G=\bigcup_i \Gamma s_i^{-1}$ ו-$N_{\Gamma\backslash G}=\sum_i s_i^{-1}$.

יהי $\sigma\in G$. אז קיימים $\gamma_i\in G$ ו-t כך ש-$s_i^{-1}\sigma=\gamma_i s_{t(i)}^{-1}$, כזכור,

$\varphi\circ\theta_\Gamma\circ V(\sigma G')=\varphi\circ\theta_\Gamma\left(\prod_i \gamma_i\Gamma'\right)=\varphi\left(\sum_i\theta_\Gamma(\gamma_i\Gamma')\right)$ וזה $\varphi\left(\sum_i(\gamma_i-1)+I_\Gamma^2\right)=\sum_i(\gamma_i-1)+I_\Gamma I_G$,

אבל מצד השני $N_{\Gamma\backslash G}\,\theta_G(\sigma G')=N_{\Gamma\backslash G}(\sigma-1+I_G^2)=N_{\Gamma\backslash G}(\sigma-1)+I_\Gamma I_G$,

וההפרש

$$N_{\Gamma\backslash G}(\sigma-1)-\sum_i(\gamma_i-1)=\sum_i\left(s_i^{-1}\sigma-s_i^{-1}-s_i^{-1}\sigma s_{t(i)}+1\right)=\sum_i\left(s_i^{-1}\sigma-s_{t(i)}^{-1}-s_i^{-1}\sigma s_{t(i)}+1\right)=$$

$$=\sum_i\left(s_i^{-1}\sigma s_{t(i)}-1\right)\left(s_{t(i)}^{-1}-1\right)=\sum_i(\gamma_i-1)\left(s_{t(i)}^{-1}-1\right)\in I_\Gamma I_G$$

הוכחה דומה ל-cor^{-2} (מופיעה ב-Wiess) נותנת

תרשים חילופי

$$\begin{array}{ccc} \Gamma/\Gamma' & \xrightarrow{\cong} & H^{-2}(\Gamma,\mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \mathrm{cor}^{-2} \\ G/G' & \xrightarrow{\cong} & H^{-2}(G,\mathbb{Z}) \end{array}$$

מושרה מהכלה

בפעם הבאה:

~~[illegible]~~ הקשר של res, cor לקוהומולוגיה הרגילה. אחרי - אינפלציה.