W4D5

20/11/14

קוהומולוגיות

תזכורת/סיכום

בהינתן $\alpha\in H^2(G,A)$ מיוצג ע"י קוציקלוס $f:G^2\to A$ (וג

$(f(\sigma,1)=\sigma f(1,1)=\sigma f(1,\tau))$ מסמנים $A'=A\oplus(\bigoplus_{\sigma\neq1}\mathbb{Z}x_\sigma)$ (מודול מפצל).

מסמנים גם $x_1=f(1,1)\in A\subseteq A'$. פעולה של G על A' לפי:

$\sigma x_\tau=x_{\sigma\tau}-x_\sigma+f(\sigma,\tau)$, ול-$a\in A$, σa לפי הפעולה על A.

יש G-הומ' הכלה $A\hookrightarrow A'$. מגדירים g $\mathbb{Z}$-הומ' $A'\to I_G$

ע"י $g|_A=0$, $g(x_\tau)=\tau-1$ $(\tau\neq1)$ ו- $g(x_1)=0$.

g הוא G הומ' כי $g(\sigma x_\tau)=(\sigma\tau-1)-(\sigma-1)=\sigma(\tau-1)=\sigma(g(x_\tau))$. קיבלנו סדרה מדויקת $0\hookrightarrow A\to A'\to I_G\to0$

של G-מודולים. הנוסחה: $\alpha=\delta\delta\bar{1}_{\mathbb{Z}}$

<u>הכנה</u>: נסתכל על $0\to I_G\to\mathbb{Z}[G]\to\mathbb{Z}\to0$ (I) - שמתפצלת מעל $\mathbb{Z}$.

נזכור $H^0(G,\mathbb{Z})=\frac{\mathbb{Z}^G}{N_G\mathbb{Z}}=\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ כאשר $n=|G|$. נסמן איבר שם

$\bar{1}_{\mathbb{Z}}=1_{\mathbb{Z}}+n\mathbb{Z}$, $\delta\bar{1}=\delta_I\bar{1}\in H^1(G,A)$.

ל- $\bar{1}\in H^0(G,A)$ יש נציג קוציקלוס $1_{\mathbb{Z}}\in C^0(\mathbb{Z})$. תמונה

ב- $\mathbb{Z}[G]$ היא $1_G\in C^0(\mathbb{Z}[G])$. $(d_1(1_G))\sigma=\sigma-1_G\in I_G$

ולכן $\delta_I\bar{1}$ מיוצג ע"י הקוציקלוס $k(\sigma)=\sigma-1$.

כעת, נניח $\alpha\in H^2(G,A)$ מיוצג ע"י קוציקלוס $f:G^2\to A$

ו- $0\to A\hookrightarrow A'\xrightarrow{g}I_G\to0$ (II) הסדרה המדויקת של המודול

המפצל. אז $\alpha=\delta\delta\bar{1}=\delta_{II}\delta_I\bar{1}$. אכן, קוציקלוס

של $\delta_I\bar{1}$ הוא k. ניקח $h:G\to A':\sigma\mapsto x_\sigma$, אז

$g(h(\sigma))=k(\sigma)$. נחשב $(d_2h)(\sigma,\tau)=\sigma(x_\tau)-x_{\sigma\tau}+x_\sigma=f(\sigma,\tau)\in A$

כצפוי.

<u>הערת נקימה</u> (Nakayama)

<u>נמשיך עם הספרות</u>

(I) $0\to I_G\to\mathbb{Z}[G]\to\mathbb{Z}\to0$

(II) $0\to A\to A'\to I_G\to0$ ובהינתן $\alpha\in H^2(G,A)$ שמיוצג ע"י $f(\sigma,\tau)$.

ראינו בדף א'15 של חבורות $H^{-2}(G,\mathbb{Z})\xrightarrow{\delta_I}H^{-1}(G,I_G)=\frac{N(I_G)}{I_G I_G}=\frac{I_G}{I_G^2}\cong\frac{G}{G'}\cong G^{ab}$

$\zeta_\sigma \longleftrightarrow (\sigma - 1_G) + I_G^2 \longleftarrow \sigma G'$ (למשל $\zeta_{1_G}=0$).

<u>מסקנה:</u> קיים הומ' של חב' חילופיות $\frac{G}{G'} \to \hat{H}^0(G,A)=\frac{A^G}{N_G A}$

ע"י $\sigma G' = \delta_{II}\delta_{I}(\zeta_\sigma)$.

עבור שדות $G=G(L/F)$, $A=L^\times$, $A^G=F^\times$ נקבל $G(L/F)\to \frac{F^\times}{N_{L/F}(L^\times)}$

<u>חישוב העתקת נק׳ימה</u> $(\sigma)=\sum_{\tau\in G} f(\tau,\sigma)$

<u>בדיקה</u> ראינו ש- $\delta_I\zeta_\sigma \in \hat{H}^{-1}(G,A)$ מיוצג ע"י קו׳ציקלים $1-\sigma$ (זו

בעצם מתוך ההגדרה). תמונה הפוכה של איבר זה

היא $x_\sigma \in A' = C^{-1}(G,A')$. כעת $d_0: G^{-1} \to G^0 = N_G$ ולכן יש

לחשב $N_G(x_\sigma) \in C^0(A') = A'$. איבר זה אמור להיות ב-$A$ ולייצג

את $H^0(G,A) \ni \delta_{II}\delta_I(\zeta_\sigma)$. נחשב $N_G(x_\sigma)=\sum_{\tau\in G}\tau(x_\sigma)=\sum_{\tau\in G}(x_{\tau\sigma}-x_\tau+f(\tau,\sigma))$

$$= \sum_{\tau\in G} f(\tau,\sigma)$$

<u>מעבר, Transfer, Verlangerung</u> (2)

תהי G חבורה ו- Γ תת חבורה מאינדקס סופי. נסמן את הקוסטים $G=\bigcup_{\text{קוסטים}} c=\bigcup\Gamma\bar c$ או בקיצור $G=\biguplus_{i=1}^{l}\Gamma\bar c_i$ (נציגים של הקוסט c_i)

$c=\Gamma\bar c$. באופן כללי אם $g\in G$ אז $\bar g=\bar c_i$ מוגדר לפי $\Gamma g=\Gamma\bar c_i$.

לכל $\sigma\in G$ הקבוצות $\{\Gamma\bar c_i\}_1^l$, $\{\Gamma\bar c_i\sigma\}_1^l$ שוות עד כדי סדר.

לכן $\exists\gamma_i\in\Gamma$ ותמורה s על $\{1,\dots,l\}$ כך ש- $\bar c_i\sigma=\gamma_i\overline{c_{s(i)}}$.

מאחר ש- $c_i\sigma=\Gamma\bar c_i\sigma=c_{s(i)}$ מתקיים $\overline{c_{s(i)}}=\overline{\bar c_i\sigma}$, כלומר

$$\gamma_i=\bar c_i\cdot\sigma\cdot\overline{c_{s(i)}}^{-1}=\bar c_i\cdot\sigma\cdot\overline{\bar c_i\sigma}^{-1} \quad (\forall\, 1\le i\le l).$$

כעת נשתמש בהעתקת המנה $q:\Gamma\to\Gamma/\Gamma'=\Gamma^{ab}$ ונגדיר

פונקציה $\sigma\longmapsto\prod_{i=1}^{l}\gamma_i\Gamma'$, או בקיצור $\varphi: G\to\Gamma^{ab}$

סימון $\prod_{i=1}^{l}\bar c_i\sigma\,\overline{\bar c_i\sigma}^{-1}\Gamma' = \prod_c \bar c\sigma\,\overline{\bar c\sigma}^{-1}\Gamma'$

<u>תכונות:</u> ① אי תלות בנציגים

נניח שבחרנו נציגים אחרים $\bar{\bar c}_i=\varepsilon_i\bar c_i$ אז $\varepsilon_i\in\Gamma$

$\bar{\bar c}_i\sigma=\varepsilon_i\bar c_i\sigma=\frac{\varepsilon_i\gamma_i}{\varepsilon_{s(i)}}\overline{\overline{c_{s(i)}}}$ וגם נקבל $\tilde\varphi(\sigma)=\varphi(\sigma)\prod_{i=1}^{l}\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{s(i)}}=\varphi(\sigma)$ (החדש)

② $\varphi: G\to\Gamma^{ab}$ הומ' של חבורות. אכן, אם בנוסף

עבור $\tau\in G$ נסמן $\bar c_i\tau=\delta_i\overline{c_{t(i)}}$ אז

חילופית Γ^{ab} $\varphi(\sigma\tau)=\prod_{i=1}^{l}\gamma_i\delta_{\tau(i)}\Gamma'=\varphi(\sigma)\varphi(\tau)$

ולכן ל-φ פירוק יחיד $\frac{G}{G'}\xrightarrow{\nu}\frac{\Gamma}{\Gamma'}$. ההומ' V

נקרא הומ' מעבר.

<u>הקשר בין העתקת מעבר להעתקת נקימה</u>

תהי U חבורה, $A\trianglelefteq U$ חילופית מאינדקס סופי.

נגדיר חבורה $G=U/A$ ונקבל הרחבה של A ע"י

G לפי הסדרה (*) $1\longrightarrow A\xrightarrow{i}U\xrightarrow{q}G\to 1$ (A-ל הופך ל-G-

מודול ע"י הצמדה).

יהי $\alpha\in H^2(G,A)$ האיבר המתאים ל-(*) ונסמן ב-

$V:U^{ab}\to A^{ab}=A$ את המעבר.

<u>טענה</u> א) $\operatorname{Im}V\subset A^G$

ב)
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "V\ (\text{הצמצום לתמונה})"] \arrow[d, "q"] & A^G \arrow[d, "u"] \\ G \arrow[r, "\nu", "\text{העתקת נקימה}"'] & \frac{A^G}{N_G A}=H^0(G,A) \end{tikzcd}$$
חילופי.

ניקח נציגים לקוסטים $x_\sigma\in U$ כך ש- $q(x_\sigma)=\sigma$

לכל $u\in U$ תיאור יחיד ax_σ לכן די לבדוק a ו-x_σ

לחוד.

א) <u>מקרה של a</u> – $u_\sigma a=\sigma(a)u_\sigma$ ולכן $V(a)=\prod\sigma(a)=N_G(A)\in A^G$

וכמו כן, כאן
$$\begin{tikzcd} a\in U \arrow[r] \arrow[d] & N_G(a) \arrow[d] \\ 1\in G \arrow[r] & 1\in H^0(G,A) \end{tikzcd}$$
ולכן התרשים חילופי ל-a.

ב) <u>מקרה של x_σ</u> – $u_\sigma u_\tau=f(\sigma,\tau)u_{\sigma\tau}$ (כך מוגדר הקוציקל f המגדיר את α). לכן $V(x_\sigma)=\prod_{\tau\in G}f(\sigma,\tau)=\nu_a(\tau)$

ואנחנו רואים שהתרשים חילופי וש- $V(x_\sigma)\in A^G$.