W4D3
18/11/14

קוהומולוגיות

פרק 6 - חבורות קוהומולוגיה מסדר נמוך

① $H^2(G,A)$ הוא אוסף הפונקציות $f:G^2\to A$ כך ש- $0=df(\lambda,\sigma,\tau)=\lambda f(\sigma,\tau)-f(\lambda\sigma,\tau)+f(\lambda,\sigma\tau)-f(\lambda,\sigma)$ מודולו פונקציות המתקבלות ע"י $g:G\to A$: $dg(\sigma,\tau)=\sigma g(\tau)-g(\sigma\tau)+g(\sigma)$.

ערכים מיוחדים - $\sigma=1_G$ במשוואה (1) ונקבל $\lambda f(1,\tau)=f(\lambda,1)$

בפרט ל-$\lambda=1$ $f(1,\tau)=f(1,1)$ ול-$\tau=1$ $f(\lambda,1)=f(1,1)$.

הערה: אם ניקח $g:G\to A$ קבועה שלה a $(dg)(\sigma,\tau)=\sigma a$.

לכן ע"י חיסור שפה ניתן לעבור מ-f ל-f' כאשר

$f'(\sigma,\tau)=f(\sigma,\tau)-\sigma f(1,1)$ אז $f'(1,1)=0$ ולכן $f'(\sigma,1)=f'(1,\tau)=0$.

תהי A חילופית. הרחבה של A ב-G היא סדרה מדויקת מהצורה $1\to A\xrightarrow{i} U\xrightarrow{q} G\to 1$ כאשר U חב', i,q הומ' חבורות, q על ו-i חח"ע, $\operatorname{Im} i=\ker q$ (נזהה בכתיב כפלי) של חבורות. יש איזו' של הרחבות - $1\to A\to U'\to G\to 1$ אם יש הומ' φ כך ש-

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dd, "\varphi"] \arrow[dr] & \\ 1 - A \arrow[ur] \arrow[dr] & & G - 1 \\ & U' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

חילופי, אז φ איזו'.

מעתה נתייחס ל-i כהכלה $i:A\hookrightarrow U$, $A=\ker q \trianglelefteq U$

ולכן A הופכת ל-U-מודול ע"י הצמדה $u(a)=uau^{-1}$.

אבל A חילופית ולכן פעולת איברי A על A יוצאת טריוויאלית.

לכן A הופכת ל-$G\cong U/A$-מודול. לכל $\sigma\in G$ נבחר $u\in U$ כך ש- $g(u)=\sigma$ ואז $\sigma(a)=uau^{-1}$. לכל (כלומר אם) $\sigma\in G$ ניקח נציג u_σ,

אז $u_\sigma a=\sigma(a)u_\sigma$ או $u_\sigma a u_\sigma^{-1}=\sigma(a)$.

q הומ' של חבורות ולכן $q(u_\sigma u_\tau)=q(u_{\sigma\tau})$. לכן קיים $f(\sigma,\tau)\in A$ כך ש- $u_\sigma u_\tau=f(\sigma,\tau)u_{\sigma,\tau}$, כלומר $f(\sigma,\tau)=u_\sigma u_\tau u_{\sigma\tau}^{-1}$.

יש אסוציאטיביות

$u_\lambda(u_\sigma u_\tau)=u_\lambda f(\sigma,\tau)u_{\sigma,\tau}=\lambda(f(\sigma,\tau))u_\lambda u_{\sigma\tau}=$

$\lambda(f(\sigma,\tau))f(\lambda,\sigma\tau)u_{\lambda\sigma\tau}$, $(u_\lambda u_\sigma)u_\tau=f(\lambda,\sigma)u_{\lambda\sigma}u_\tau=$

$=f(\lambda,\sigma)f(\lambda\sigma,\tau)u_{\lambda\sigma\tau}$

ונקבל שוויון אם $(df)(\lambda,\sigma,\tau)=1$, כלומר אם f קוציקלוס

נניח שבחרנו במקום u_σ את $v_\sigma = g(\sigma)u_\sigma$ אז נקבל קוציקלוס

כי $(\sigma,\tau) \to v_\sigma v_\tau (v_{\sigma\tau})^{-1} = g(\sigma)u_\sigma g(\tau)u_\tau (g(\sigma\tau)u_{\sigma\tau})^{-1} =$

$$g(\sigma)\sigma(g(\tau))(u_\sigma u_\tau u_{\sigma\tau}^{-1})g(\sigma\tau)^{-1} = g(\sigma)\sigma(g(\tau))f(\sigma,\tau)g(\sigma,\tau)^{-1} =$$

$$= f(\sigma,\tau)(d_A g(\sigma,\tau))$$

חילופית

{הרחבות עם מבנה מושרה נתון} $\longrightarrow$ $\{H^2(G,A)\}$

ברור ש-2 הרחבות {הרחבות של A חילופית} $\longrightarrow$ {מבנה של G-מודול על A ואיבר ב-$H^2(G,A)$} - מסקנה

איזומורפיות יתנו אותו איבר $\boxed{\Omega(A) \text{ G-מודול}}$ במחב' הקוהומולוגיה (נברור

$(u'_\sigma = \varphi(u_\sigma))$. חלק יחס השקילות הזה ההעתקה Ψ חח"ע

ועל. חח"ע למשל כי כקבוצות $U = A\times G$ ע"י $u \longleftrightarrow (a,\sigma)$ אז $u = a\sigma$,

ואנחנו יודעים איך צריך להתנהג כפל $(a,\sigma)(a',\tau) = (a\sigma(a')f(\sigma,\tau),\sigma\tau)$. לכן

u מוגדרה ביחידות עד כדי שקילות. בדומה, זה על, כי נוכל

לבנות לקוציקלוס נתון u עם הכפל המוגדר מעלה, ורגיל שזה

עד כדי שפה.

מבנה של חבורה על ההרחבות - $1 \to (A \xrightarrow{inv} A \xrightarrow{i} U \xrightarrow{q} G \to 1$

הופכי. אם יש גם $1 \to A \xrightarrow{i'} U' \xrightarrow{q'} G \to 1$ אז ניקח

$\tilde{U} = \dfrac{\{(u,u') \in U\times U' \mid q(u) = q'(u')\}}{\{(i(a), i'(a)^{-1}), a\in A\} = N}$ וניקח $j: A \to \tilde{U}$ ע"י $a \to i(a)N \in \tilde{U}$,

$\tilde{U} \to G$ לפי q או q', $1 \to A \to G \to \tilde{U} \to 1$ מדויק. זה נותן מכפלה

זה נקרא סכום Baer

$(u_\sigma,u'_\sigma)(u_\tau,u'_\tau)(u_{\sigma\tau},u'_{\sigma\tau})^{-1} = (f(\sigma,\tau), f'(\sigma,\tau))N$ ונקבל שזה $i(f(\sigma,\tau)f'(\sigma,\tau))$

<u>$H^1(G,A)$</u> מורכב מפונקציות $f: G \to A$ כך $0 = df(\sigma,\tau) = \sigma f(\tau) - f(\sigma\tau) + f(\sigma)$

מודולו פונקציות $(da)\sigma = \sigma a - a$. <u>הערה</u> ל-$A$ G-מודול טריוויאלי נקבל

$H^1(G,A) = Hom_{group}(G,(A,+))$. אוטומורפיזמים של ההרחבה מודולו אוטומורפיזמים ע"י הצמדה ב-$a\in A$, כי $\varphi_a(u_\sigma) = a u_\sigma a^{-1} = \frac{\sigma a}{a}u_\sigma$

da בכתיב כפלי.

<u>דוגמאות</u> 1) $H^1(G,\mathbb{Z}) = 0$ כי G סופית.

2) אם $\varphi: G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ב-$\hat{G} = H^1(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ חיבורית

ניתן להגדיר $e^{2\pi i\varphi}: G \to \mathbb{T}$ ולכן $\widehat{G/G'} = \widehat{G^{ab}} = \hat{G} = H^1(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

אוסף הקרקטרים של G.

<u>$H^0(G,A)$</u> $(da)(\sigma) = \sigma a - a$, $(d_{-1}a) = N_G a$ וכמו שראינו $H^0(G,A) = \dfrac{A^G}{H^0(G,A)}$.

אם A G-מודול טריוויאלי נקבל $H^0(G,A) = \dfrac{A}{|G|A}$ ולכן

למשל $H^0(G,\mathbb{Z}) = \dfrac{\mathbb{Z}}{|G|\mathbb{Z}}$, $H^0(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$.

$H^{-1}(G,A)$ תזכורת: $0\to I_G\to\mathbb{Z}[G]\xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{Z}\to 0$ כאשר $I_G\subseteq\mathbb{Z}[G]$ הוא

$\mathbb{Z}$ מודול חופשי עם $\mathbb{Z}$-בסיס $\{\sigma_G-1 \mid \sigma\neq 1_G\}$. $d_0: A\to A$

הוא $a\mapsto N_G a$, וראינו גם $d_{-1}: G^{-2}(A)\to A_n$ ע"י

$f(\sigma)\mapsto\sum_{\sigma\in G}(\sigma-1)f(\sigma-1)$. $H^{-1}(G,A)=\frac{{}_{N_G}A}{I_G\cdot A}$ כאשר ${}_{N_G}A=\{a\in A \mid N_G a=0\}$.

<u>מקרה פרטי</u>: A - ו G - מודול טריוויאלי $H^{-1}(G,A)={}_{N_G}A=\{a\in A \mid |G|a=0\}$

לכן $H^{-1}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})=\frac{\frac{1}{|G|}\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}}\cong\frac{\mathbb{Z}}{|G|\mathbb{Z}}$, $H^{-1}(G,\mathbb{Z})=0$. האיזו' המסוגר"ים מתקבל

גם מה δ ע"י הסדרה $0\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\to 0$,

$H^{-1}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\xrightarrow[\cong]{\delta}H^0(G,\mathbb{Z})$, קל לראות ש-$\delta$ משרה כפל ב-$|G|$ מחבר הקוהומולוגיה.

$$\frac{\frac{1}{|G|}\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}}\xrightarrow{|G|\cdot}\frac{\mathbb{Z}}{|G|\mathbb{Z}}$$

<u>$H^{-2}(G,A)$</u> ניקח $0\to I_G\to\mathbb{Z}[G]\xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{Z}\to 0$ שבה $\mathbb{Z}[G]$ חופשי ולכן משרה

ולכן איזו' קוהומולוגית. נקבל $H^{-2}(G,\mathbb{Z})\xrightarrow[\cong]{\delta}H^{-1}(G,I_G)=\frac{I_G}{I_G^2}$

סימון לכל $\sigma\in G$ נסמן ב-$\zeta_\sigma\in H^{-2}(G,A)$ את האיבר המתאים ל-

$(\sigma-1_G)+I_G^2\in H^{-1}(G,I_G)$, קל לראות $\zeta_\sigma(\tau)=\begin{cases}1_{\mathbb{Z}} & \tau=\sigma^{-1}\\ 0 & \text{o/w}\end{cases}$.

<u>למה</u> קיים איזו' של חבורות $G^{ab}=G/G'\longrightarrow I_G/I_G^2$

$\sigma G'\longrightarrow(\sigma-1_G)+I_G^2$

כאשר הפעולה מימין היא חיבור.

<u>מסקנה</u> קיים איזו' של חבורות $H^{-2}(G,\mathbb{Z})\cong G^{ab}=G/G'$

על ידי $H^{-2}(G,\mathbb{Z})\xrightarrow[\cong]{\delta}H^{-1}(G,I_G)\cong\frac{I_G}{I_G^2}\cong G^{ab}$ לפי הלמה.

<u>הוכחת הלמה</u> $\varphi:\sigma\mapsto(\sigma-1)+I_G^2$ הומו' של חבורות כי

$(\sigma\tau-1)-(\sigma-1)-(\tau-1)=(\sigma-1)(\tau-1)\in I_G^2$

כלומר $\varphi(\sigma\tau)=\varphi(\sigma)+\varphi(\tau)$. φ על בבירור וצריך לבדוק חח"ע.

בכיוון שני $\bigoplus\mathbb{Z}(\sigma-1)=I_G$, $\mathbb{Z}$-מודול חופשי ולכן יש

הומו' $\psi: I_G\to G/G'$ ע"י $\psi(\sigma-1)=\sigma G'$ ($\sigma\neq 1$) ומהחישוב הקודם

$\psi((\sigma-1)(\tau-1))=\psi((\sigma\tau-1)-(\sigma-1)-(\tau-1))=$

$\psi(\sigma\tau-1)\psi(\sigma-1)^{-1}\psi(\tau-1)^{-1}=(\sigma\tau G')(\sigma^{-1}G')(\tau^{-1}G')=G'$.

לכן $I_G^2\subseteq G'$ ויש מנה $\psi:\frac{I_G}{I_G^2}\to G^{ab}$, ובברור $\psi\circ\varphi=id$.

מודול מפצל (של ארטין) ⑥

ראה גם Iyamaga 30-31 — Theory of Nums. Lang 70-71.

הרחבות של מודול ע"י I_G

יהי A מודול-G. הרחבה של A ע"י I_G היא סדרה מדויקת של G-מודולים $0\to A\to A'\xrightarrow{h} I_G\to 0$. I_G חופשי $\mathbb{Z}$ ולכן הסדרה מתפצלת מעל $\mathbb{Z}$. $\{\sigma-1|\sigma\neq1\}$ בסיס-$\mathbb{Z}$ של I_G. לכל $\sigma\in G$ נבחר $x_\sigma\in A'$ כך ש-$h(x_\sigma)=\sigma-1$. בפרט ל-$\sigma=1_G$ נקבל $x_{1_G}\in A$ (כאשר נחשוב על ; כהכלה).

מתקיים $h(\sigma x_\tau - x_{\sigma\tau}+x_\sigma)=\sigma(h(x_\tau))-h(x_{\sigma\tau})+h(x_\sigma)=$
$\sigma(\tau-1)-\sigma\tau+\sigma=0$

ולכן קיים $f(\sigma,\tau)\in A$ כך ש-$f(\sigma,\tau)=\sigma x_\tau-x_{\sigma\tau}+x_\sigma$. בפרט ל-$\sigma=\tau=1_G$ נקבל $f(1_G,1_G)=x_{1_G}$.

נראה שהתנאי $\lambda(\sigma x_\tau)=(\lambda\sigma)(x_\tau)$ שקול ל-$df=0$.

$\lambda(\sigma x_\tau)=\lambda(x_{\sigma\tau}-x_\sigma+f(\sigma,\tau))=(x_{\lambda\sigma\tau}-x_{\lambda\sigma}+f(\lambda,\sigma\tau))-$
$-(x_{\lambda\sigma}-x_\lambda+f(\lambda,\sigma))+\lambda f(\sigma,\tau)=x_{\lambda\sigma\tau}-x_{\lambda\sigma}+[\lambda f(\sigma,\tau)+f(\lambda,\sigma\tau)-f(\lambda,\sigma)]$.

מצד שני $(\lambda\sigma)(x_\tau)=x_{\lambda\sigma\tau}-x_{\lambda\sigma}+f(\lambda\sigma,\tau)$ ולכן יש שוויון אם f קוציקלוס. נניח שבמקום x_σ נבחר $y_\sigma=x_\sigma+g(\sigma)$. אז נקבל קוציקלוס $(\sigma,\tau)\to\sigma y_\tau-y_{\sigma\tau}+y_\sigma=\sigma(x_\tau+g(\tau))-(x_{\sigma\tau}+g(\sigma\tau))+$
$+(x_\sigma+g(\sigma))=f(\sigma,\tau)+(dg)(\sigma,\tau)$

ושוב קיבלנו העתקה $\left\{0\to A\to A'\to I_G\to 0\right\}\Big/_{\text{שקילות}}^{\text{הרחבות}}\xrightarrow{\Psi}H^2(G,A)$ ושוב יש איזו' אם לוקחים הרחבות עד כדי שקילות (מהי? $\underbrace{}_{\text{אמר}}$) כי G - $\mathbb{Z}$-מודולים $A'=A\oplus(\oplus_{\sigma\neq1}\mathbb{Z}x_\sigma)$ ואפשר לשחזר A' באופן יחיד.

$x_{1_G}=0$ הכתיב חיבורי

לכן Ψ חח"ע ועל. כדאי לבחור f כך ש-$f(\sigma,1)=1=f(1,\tau)$.