W3D5
13/11/14.

קוהומולוגיות

$$\{[\sigma_1,\dots\sigma_n]\}\ \dots\ \{[\sigma_1,\sigma_2]\}\quad \{[\sigma_1]\}\quad \{[\cdot]\}$$

$$\longrightarrow X_n \xrightarrow{\partial_n} \dots X_2 \xrightarrow{\partial_2} X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\partial_0=\mu\circ\varepsilon} X_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}=\partial_1^*} X_{-2} \xrightarrow{\partial_2=\partial_2^*} \dots$$

$$X_{-1} = X_0^*,\qquad X_{-2} = X_1^*$$

$$\varepsilon(\sigma)=1_{\mathbb{Z}},\qquad X_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} X_{-1},\qquad 0 \to \mathbb{Z} \to 0,\qquad \mathbb{Z} \cong Hom(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \xrightarrow{\varepsilon^*} X_{-1}$$

$\partial_n[\sigma_1,\dots\sigma_n]$

ל- $X_{-n}=X^*_{n-1}$ יש G - בסיס $\{\langle\sigma_1,\dots\sigma_{n-1}\rangle\}$ והדואליות

$$(\sigma_0\langle\sigma_1,\dots\sigma_{n-1}\rangle)(\tau_0[\tau_1,\dots\tau_{n-1}]) = \prod_{i=0}^{n-1}\delta_{\sigma_i,\tau_i}$$

נחשב כמה העתקות בעזרת זה.

$\mu:\mathbb{Z}\to X_{-1}$ G-מורפיזם, די לחשב את $\mu(1_{\mathbb{Z}})$. יש למצוא $n_\sigma\in\mathbb{Z}$ כך ש- $\mu(1_{\mathbb{Z}})=\sum_{\sigma\in G} n_\sigma\langle\cdot\rangle$.

$n_\tau=(\mu(1_{\mathbb{Z}}))(\tau[\cdot])=\varepsilon^*(id_{\mathbb{Z}})(\tau[\cdot])=(id_{\mathbb{Z}}\circ\varepsilon)(\tau[\cdot])=1$ ולכן $\mu(1_{\mathbb{Z}})=N_G\langle\cdot\rangle$ ולכל $\rho\in G$ $\mu(\rho)=\rho N_G\langle\cdot\rangle = N_G\langle\cdot\rangle$

$\partial_0([\cdot])=N_G\langle\cdot\rangle$. $\partial_{-1}:X_{-1}\to X_{-2}$ - צריך למצוא $n_{\sigma,\sigma_1}\in\mathbb{Z}$ כך ש- $\partial_{-1}\langle\cdot\rangle=\sum_{\sigma,\sigma_1} n_{\sigma,\sigma_1}\sigma\langle\sigma_1\rangle$.

$$n_{\sigma,\sigma_1}=(\partial_{-1}\langle\cdot\rangle)(\sigma[\sigma_1])=(\partial_1^*\langle\cdot\rangle)(\sigma[\sigma_1])=$$
$$\langle\cdot\rangle\partial_1(\sigma[\sigma_1])=\langle\cdot\rangle(\sigma(\partial_1[\sigma_1]))=\langle\cdot\rangle(\sigma(\sigma_1[\cdot]-[\cdot]))=$$
$$\langle\cdot\rangle(\sigma\sigma_1[\cdot]-\sigma[\cdot])=\delta_{\sigma\sigma_1,1_G}-\delta_{\sigma,1_G}$$

ולכן $\partial_{-1}\langle\cdot\rangle=\sum_{\sigma_1\in G}\sigma_1^{-1}\langle\sigma_1\rangle-\langle\sigma_1\rangle=\sum_{\sigma\in G}(\sigma^{-1}-1)\langle\sigma\rangle$.

כעת, נתאר $Hom_G(X_m,A)$ ($m\geq 1$) שקול לפונקציות מאיברי ה-G בסיס ל-A.
אז ל- $\{f:G^m\to A\}$ לחשב ל- $m<0$ יותר קשה.

הגדרות - לכל G-מודול A נסמן $C^n(G,A)=\{f:G^n\to A\}$ $(n\geq 1)$ ו- $C^0(G,A)=A$. נקבל איזו' של חבורות חילופיות:

$Hom_G(X_n,A)\cong C^n(G,A)$ ע"י $f\mapsto\{(\sigma_1,\dots\sigma_n)\mapsto f([\sigma_1\dots\sigma_n])\}$ ל- $n\geq 0$

ובפרט $Hom_G(X_0,A)\cong C^0(G,A)=A$ ע"י $f\mapsto f([\cdot])$. נסמן גם $C^{-n}(G,A)$ להיות $C^{n-1}(G,A)$ לכל $n\geq 1$. ומכאן $C^{-1}(G,A)=C^0(G,A)=A$ אז גם ל-

$n\geq 1$ נקבל $C^{-n}(G,A)\cong Hom_G(X_{-n},A)$ ע"י $f\to f\langle\cdot\rangle$

ל- $n=1$ ואחרת $f\to\{(\sigma_1,\dots\sigma_{n-1})\mapsto f(\langle\sigma_1,\dots\sigma_{n-1}\rangle)\}$ כרגיל.

וברור שישנה פונקטוריאליות (אם $\varphi: A\to B$ אז $\varphi^*: C^n(G,A)\to C^n(G,B)$ ע"י הרכבת φ.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots\to & Hom_G(X_{n-1},A) & \xrightarrow{\partial_n^*} & Hom_G(X_n,A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^*} & Hom_G(X_{n+1},A) & \to\dots \\ & \wr & & \wr & & \wr & \\ \dots\to & C^{n-1}(G,A) & \xrightarrow{d_n} & C^n(G,A) & \xrightarrow{d_{n+1}} & C^{n+1}(G,A) & \to\dots \end{array}$$

נרצה לחשב את d.

<u>הדיפרנציאל במונחי שרשראות:</u>

1. $d_n: C^{n-1}(G,A)\to C^n(G,A)$ $(n\geq 2)$ עבור $f\in C^{n-1}(G,A)$,

$$(d_n f)(\sigma_1,\dots\sigma_{n-1}) = (\partial_n^* f)([\sigma_1,\dots\sigma_{n-1},\sigma_n]) = f(\partial_n[\sigma_1,\dots\sigma_n]) =$$
$$f\Big(\sigma_1[\sigma_2,\dots,\sigma_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[\sigma_1,\dots,\sigma_i\sigma_{i+1},\dots\sigma_n] + (-1)^n[\sigma_1,\dots\sigma_{n-1}]\Big) =$$
$$\sigma_1 f[\sigma_2,\dots,\sigma_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i f[\sigma_1,\dots,\sigma_i\sigma_{i+1},\dots\sigma_n] + (-1)^n f[\sigma_1,\dots\sigma_{n-1}]$$

למשל

$$(d_3 f)(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = \sigma_1 f(\sigma_2,\sigma_3) - f(\sigma_1\sigma_2,\sigma_3) + f(\sigma_1,\sigma_2\sigma_3) - f(\sigma_1,\sigma_2)$$
$$(d_2 f)(\sigma_1,\sigma_2) = \sigma_1 f(\sigma_2) - f(\sigma_1\sigma_2) + f(\sigma_1)$$

2. $d_1: \overset{A}{\overset{\parallel}{C^0(G,A)}}\to C^1(G,A)$ –

$$\begin{array}{ccc} f_a & \longleftarrow & a \\ f & \longrightarrow & f([\cdot]) = a \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ Hom_G(X_0,A) & \simeq & C^0(A) = A \end{array}$$

, כאשר ($f_a(\sigma[\cdot]) = \sigma a$. כעת

$(d_1 f_a)(\sigma) = (\partial_1^* f_a)([\sigma]) = f_a(\partial_1[\sigma]) = f_a(\sigma[\cdot]-[\cdot]) = \sigma a - a$.

3. $d_0: \overset{A}{\overset{\parallel}{C^{-1}(G,A)}}\to \overset{A}{\overset{\parallel}{C^0(G,A)}}$

$$\begin{array}{ccc} Hom_G(X_{-1},A) & \simeq & C^{-1}(G,A) \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ g & \longrightarrow & g(\cdot) \\ g_a & \longleftarrow & a \end{array}$$

$$(d_0 a) = (\partial_0^* g_a)([\cdot]) = g_a(\partial_0([\cdot])) = g_a(N_G\langle\cdot\rangle) = N_G a$$

<u>הערה</u>: במונחי שרשראות $H^0(G,A) = \frac{\ker d_1}{\operatorname{Im} d_0} = \frac{A^G}{N_G A}$ כמו שכבר גילינו. אבל במונחי שרשראות זה לא איזו' אלא ממש <u>שוויון</u>.

$\chi: A^G\to H^0(G,A): a\longrightarrow a+N_G A\in H^0(G,A)$

4. $d_{-1}: \overset{A}{\overset{\parallel}{C^{-2}(G,A)}}\to \overset{A}{\overset{\parallel}{C^{-1}(G,A)}}$ נזכור $f\in C^{-2}(G,A)$ זה $f\in Hom_G(X_{-2},A)$.

$$(d_{-1} f) = (\partial_{-1}^* f)(\langle\cdot\rangle) = f(\partial_{-1}(\langle\cdot\rangle)) = f\Big(\sum_{\sigma\in G}(\sigma^{-1}-1)\langle\sigma\rangle\Big) = \sum_{\sigma\in G}(\sigma^{-1}-1)f(\sigma) = \sum_{\sigma\in G}(\sigma-1)f(\sigma^{-1})$$

<u>הקוהומולוגיה הרגילה</u> היא של

$$\begin{array}{ccccc} 0\to Hom_G(X_0,A) & \xrightarrow{\partial_1^*} & Hom_G(X_1,A) & \xrightarrow{\partial_2^*} & \dots \\ \wr & & & & \\ C^0(G,A) & \xrightarrow{d_1} & C^1(G,A) & \xrightarrow{d_2} & \dots \end{array}$$

ואכן $d_1 a = \{\sigma \mapsto (\sigma a - \sigma)\}$ ולכן $H^0_{\text{רג׳}}(G,A) = \ker d_1 = A^G$ ו- $N_{\text{רג׳}}: a \mapsto a \; (a \in A^G)$

$N_{\text{רג׳}}: A^G \to H^0_{\text{רג׳}}(G,A) = A^G$ היא פשוט הזהות (במונחי שרשראות).

בשבוע הבא: אינטרפרטציות של קוהומולוגיות מסדר נמוך.