4/11/14
~~W2~~D3

קוהומולוגיה

קוהומולוגיה של חבורה סופית G – מתחילים מפתרון מלא

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "\partial_2"] & X_1 \arrow[r, "\partial_1"] & X_0 \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[dr, "\varepsilon"] & & X_{-1} \arrow[r, "\partial_{-1}"] & X_{-2} \arrow[r, "\partial_{-2}"] & \cdots \\
& & & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[ur, "p"] \arrow[r] & 0 & &
\end{tikzcd}$$

כאשר X_i G-מודול. בהינתן $A\in G\text{-mod}$ נפעיל $Hom_G(\_,A)$

$$\cdots \leftarrow Hom_G(X_1,A) \xleftarrow{\partial_1^* = \circ\partial_1} Hom_G(X_0,A) \xleftarrow{\partial_0^* = \circ\partial_0} Hom_G(X_{-1},A) \leftarrow \cdots$$

והקוהומולוגיה $H^m(G,A)=\dfrac{Ker\,\partial^*_{m+1}}{Im\,\partial^*_m}$.

<u>פונקטוריאליות</u> - אם $f:A\to B$ מורפיזם G נקבל דיאגרמה קומוטטיבית

$$\begin{tikzcd}
Hom_G(X_{m+1},A) \arrow[d] & Hom_G(X_m,A) \arrow[l] \arrow[d] \\
Hom_G(X_{m+1},B) & Hom_G(X_m,B) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

ולכן f משרה מורפיזם של סדרות ← של חבורות הומולוגיה. מסקנה: $H^n(G,f):H^n(G,A)\to H^n(G,B)$. $H^n(G,\_)$ הוא פונקטור $G\text{-mod}\to \mathbb{Z}\text{-mod}$ (לא מוכיח שזה לא תלוי בפתרון. בהרצאה נניח שתמיד לוקחים פתרון טבעי)

<u>סדרה ארוכה מדויקת:</u>

תהי $0\to A\xrightarrow{f} B\xrightarrow{h} C\to 0$ סדרה קצרה מדויקת, נקבל תרשים חילופי:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom_G(X_{-1},A) \arrow[r] \arrow[d] & Hom_G(X_{-1},B) \arrow[r] \arrow[d] & Hom_G(X_{-1},C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Hom(X_0,A) \arrow[r] \arrow[d] & Hom_G(X_0,B) \arrow[r] \arrow[d] & Hom_G(X_0,C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Hom(X_1,A) \arrow[r] \arrow[d] & Hom_G(X_1,B) \arrow[r] \arrow[d] & Hom_G(X_1,C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& \vdots & 0 & &
\end{tikzcd}$$

לשפר

רחו"ע ולכן מגיע ל-

השורות מדויקות משמאל בגלל הפנקטור Hom ומימין כי X_i G-חופשי.

נקבל סדרה ארוכה מדויקת

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H_n(A)\xrightarrow{f} H_n(B)\xrightarrow{h} H_n(C)\xrightarrow{\partial} H_{n+1}(A)\to\cdots$$

נראה מה ה-δ הבא על התרשים. H_0 לגבי —

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & X_0 \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & X_{-1} \arrow[r] & \cdots \\
& & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[u, "\mu"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

נקבל

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_G(X_1,A) & \mathrm{Hom}_G(X_0,A) \arrow[l, "\partial_1^*"'] & \mathrm{Hom}_G(X_{-1},A) \arrow[l, "\partial_0^*"'] \arrow[d, "\mu^*"] \\
& & \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z},A)\cong A^G \arrow[ul, "\varepsilon^*"] \\
& & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Hom}_G(\_,A)$ כי - מדויק
מדויק משמאל.

לכן יש העתקה של חב׳ חילופיות

$$K : A^G \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z},A) \xrightarrow[\text{חח"ע}]{\varepsilon^*\ \text{מצומצם}} \ker(\partial_1^*) \xrightarrow{\text{מנה}} \frac{\ker(\partial_1^*)}{\mathrm{Im}(\partial_0^*)} = H^0(G,A)$$

וברור שהיא על. מה הגרעין?

$\ker K = \mathrm{Im}\,\mu^*$

נתאר את התמונה בשפה של A^G -

$\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z},A)$ במקום A^G-ל

לכל $h \in \mathrm{Hom}_G(X_{-1},A)$ האיבר $\mu^* h \in A^G$ נתון ע״י $h(\mu(1))$

$$\begin{tikzcd}
h \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & h\circ\mu \arrow[r, "\text{ע״י}"] & h(\mu(1)) \\
\mathrm{Hom}_G(X_{-1},A) \arrow[r, "\mu^*"] & \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z},A) \arrow[r, "\cong"] & A^G
\end{tikzcd}$$

X_{-1} מודול חופשי נ״ס מעל G - אז $e_1 \dots e_k$ G-בסיס שלו,

$X_{-1} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}[e_i]$. $\mathbb{Z}$ הוא G-מודול טריוויאלי ולכן $\mu(1_{\mathbb{Z}}) \in X_{-1}^G$. לכן $\mu(1)$ מהצורה

$\sum_{i=1}^{k} m_i N_G e_i$ (m_i שלמים) כעת, $h \in \mathrm{Hom}_G(X_{-1},A)$ מתואר ע״י $a_i := h(e_i) \in A$ ($i=1,\dots,k$).

ואז $\mu^*(h) = \sum_{i=1}^{k} m_i N_G a_i$ או $N_G \sum_{i=1}^{k} m_i a_i$ - ואפשר לקבל כל איבר ב-$N_G A$

באופן זה כי $\gcd(m_1 \dots m_k) = 1$. לכן העתקה זו משרה א״ע של חב׳ חילופיות $\frac{A^G}{N_G A} \xrightarrow{\cong} H^0(G,A)$. למה? לא כולם 0 כי $\ker\mu = 0$, μ חח״ע.

אם ה-gcd היה גדול מ-1 ל-$\frac{X_{-1}}{\mathrm{Im}\,\mu}$ יש פיתול (כחבורה חילופית). אבל $\mathrm{Im}\,\mu = \ker\partial_{-1}$ ולכן ∂_{-1} משרה שיכון $\frac{X_{-1}}{\mathrm{Im}\,\mu} \hookrightarrow X_{-2}$

אבל X_{-2} חופשית מעל G ובפרט מעל $\mathbb{Z}$ ולכן אין לה פיתול.

<u>התאפסות</u>

על אילו מודולים הקוהומולוגיה מתאפסת? הם נקראים "מודולים מושרים". נאפיין אותם.

1) G-מודול איזו׳ למודול מהצורה $\mathbb{Z}[G]\otimes M_0$ כאשר M_0 G-מודול טריוויאלי,

נקרא מודול מושרה (יש הגדרות שקולות).

<u>הערה</u> יהי M G-מודול ונסמן ב-M_0 את החבורה של M כ-G-מודול

טריוויאלי, אז $\mathbb{Z}[G]\otimes M_0$ G-איזו' ל- $\mathbb{Z}[G]\otimes M$ (ובפרט $\mathbb{Z}[G]\otimes M$ מושרה).

בדיקה: נגדיר איזו' $\alpha: \sigma\otimes m \to \sigma\otimes\sigma m$:

$$\alpha(\tau(\sigma\otimes m)) = \alpha(\tau\sigma\otimes m) = \tau\sigma\otimes\tau\sigma m = \tau(\sigma\otimes\sigma m) = \tau(\alpha(\sigma\otimes m))$$

לבסוף, נגדיר $\beta: \sigma\otimes m \to \sigma\otimes\sigma^{-1}m$ (מכפלה ב- M) מכיוון ההפוך, אז $\beta=\alpha^{-1}$ ולכן α חח"ע ועל.

מסקנה - אם N, L G-מודולים ו- L מושרה אז $L\otimes N$ מושרה -

$$L\otimes N \cong (\mathbb{Z}[G]\otimes M)\otimes N = \mathbb{Z}[G]\otimes(M\otimes N)$$

יש קריטריון שקול שכאן יהיה טריוויאלי, אנלוגים אחרים מסובכים מאוד.

2) יהי L G-מודול, מושרה $\longleftrightarrow$ קיימת תת חבורה חילופית $B\subset L$ כך ש- $L=\bigoplus_{\sigma\in G}\sigma B$ - כלומר לכל $x\in L$ תיאור יחיד כ- $\sum_{\sigma\in G}\sigma b_\sigma$ עבור $b_\sigma\in B$ כלשהם.

בדיקה: אם $L=\mathbb{Z}[G]\otimes M_0$ ו- M_0 טריוויאלי. מפריק $\mathbb{Z}$-מודולים $\mathbb{Z}[G]=\bigoplus_{\sigma\in G}\mathbb{Z}\sigma$ ולכן $L=\bigoplus_{\sigma\in G}\mathbb{Z}\sigma\otimes M_0$. ניקח $B=\mathbb{Z}\cdot 1_G\otimes M_0$ אז $L=\bigoplus_{\sigma\in G}\sigma B=\bigoplus_{\sigma\in G}\mathbb{Z}\sigma M_0$. מכיוון שני $L=\bigoplus_{\sigma\in B}\sigma B$. B $\mathbb{Z}$-מודול ונסמן $B_0=B$ G-מודול טריוויאלי. נגדיר $\varphi:\mathbb{Z}[G]\otimes B_0\to L$ ע"י $\sigma\otimes b\to\sigma b$ זה G מורפיזם

$$\varphi(\tau(\sigma\otimes b))=\varphi(\tau\sigma\otimes b)=\tau\sigma b=\tau(\varphi(\sigma\otimes b))$$

ולכל $x\in\mathbb{Z}[G]\otimes B_0$ תיאור יחיד כ- $\sum_\sigma \sigma\otimes b_\sigma$ ואז $\varphi(x)=\sum_{\sigma\in G}\sigma(b_\sigma)$, ומאחר ש- $B\to\sigma B$ חח"ע ועל גם φ.

הערה סכום מודולים מושרים מושרה. $L=\bigoplus\sigma B$, $L'=\bigoplus\sigma B'$ אז $L\oplus L'=\bigoplus\sigma(B\oplus B')$.

הערה $\mathbb{Z}[G]$ מודול מושרה.

מסקנה כל G-מודול חופשי נ"ס מושרה.

תכונות מודול מושרה

יהי $L=\bigoplus_{\sigma\in G}\sigma B$ מודול מושרה. נסמן $\pi: Hom(L,L)$ ההטלה של B לאורך $\sum_{\sigma\neq 1}\sigma(B)$. אז $N_G(\pi)=\sum_\sigma \sigma\pi\sigma^{-1}=id_L$. בדיקה יהי $x=\sum_{\tau\in G}\tau b_\tau\in L$, אז

$$\sum_\sigma \sigma\pi\sigma^{-1}x=\sum_{\sigma,\tau}\sigma\pi\sigma^{-1}\tau b_\tau=\sum_{\tau}\tau b_\tau = x$$

כלומר id_L נורמה של איבר של $Hom(L,L)$. זה נקרא G-רגולריות.

(מעניינים G-מודולים של פנקטור $Hom_G(\_,L)$ ו- $Hom(\_,B)$ (על $\mathbb{Z}$-מודול)

(מעוניינים בטווח ל- B)

$\lambda: Hom_G(\_,L)\to Hom(\_,B): f\to\pi\circ f$

$\nu: Hom(\_,B)\to Hom_G(\_,L): \varphi\to N_G(\varphi)=\sum_\sigma \sigma\circ\varphi\circ\sigma^{-1}$ (אמור להיות פה אבל G-מודולים)

אז $\mu=\lambda^{-1}$ והם יוצרים שקילות טבעית בין הפונקטורים הללו. נבדוק:

$$(\mu\circ\lambda)f = N_G(\pi\circ f) = f,\quad (\lambda\circ\mu)\varphi = \pi\circ N_G(\varphi) = \pi\sum_{\sigma\in G}\sigma\varphi\sigma^{-1} = \pi\circ\varphi = \varphi.$$

מודול נקרא אציקלי אם כל חבורות ה(קו)הומולוגיות מתאפסות. לפעמים דורשים רק על חבורות H^n כש-$0<n$, למשל. אנחנו נדרוש לכל n, כולל 0.

טענה: G-מודול מושרה הוא אציקלי (הכול ביחס לפתרון X כלשהו).

הוכחה: יהי $(\varepsilon,\mu,\partial,X)$ פתרון מלא של $\mathbb{Z}$. השקילות הטבעית ~~גם~~ יוצרת שקילות טבעית בין הקומפלקסים הבאים של $\mathbb{Z}$-מודולים –

$$\begin{tikzcd}
\dots & \mathrm{Hom}_G(X_{n+1},L) \arrow[l] \arrow[d, "\lambda", "\cong"'] & \mathrm{Hom}_G(X_n,L) \arrow[l, "\partial^*_{n+1}"'] \arrow[d, "\lambda", "\cong"'] & \mathrm{Hom}_G(X_{n-1},L) \arrow[l, "\partial^*_n"'] \arrow[d, "\lambda", "\cong"'] & \dots \arrow[l] \\
\dots & \mathrm{Hom}(X_{n+1},B) \arrow[l] & \mathrm{Hom}(X_n,B) \arrow[l, "\partial^*_{n+1}"'] & \mathrm{Hom}(X_{n-1},B) \arrow[l, "\partial^*_n"'] & \dots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

אבל הסדרה התחתונה מצמצום של הפעלת פונקטור $\mathrm{Hom}(\_,B)$ מ-$\mathbb{Z}$ מודולים ל-$\mathbb{Z}$-מודולים על X ולכן מדויק, והקוהומולוגיה מתאפסת.

תתי חבורות

תהי $H\subseteq G$ תת חבורה. כל G-מודול הוא גם H-מודול (פונקטור שוכח).

הערה: $\mathbb{Z}[G]$ הוא גם H מודול חופשי (או $\mathbb{Z}[H]$ מודול חופשי).
אם N G-מודול חופשי אז הוא גם H-מודול חופשי.

בדיקה: מספיק לבדוק ל-$\mathbb{Z}[G]$. אם $G=\dot{\bigcup}_{i=1}^{n}Hs_i$ $\mathbb{Z}[H]$ נוצר ע"י $s_1,\dots,s_n$ באופן חופשי.

מסקנה: G-מודול מושרה הוא גם H-מודול מושרה.

אם $L=\mathbb{Z}[G]\otimes M_0$ אז L H-מודול מושרה ($\mathbb{Z}[G]$ H-מודול חופשי ולכן מושרה).
לכן אם L G-מודול מושרה אז הוא טריוויאלי קוהומולוגי: $H^n(\Gamma,L)=0$ לכל תת חבורה $\Gamma\subseteq G$, $n\in\mathbb{Z}$.

הערה על חבורת מנה: תהי $H\trianglelefteq G$ ויהי A - G-מודול. אז A^H הוא G/H מודול ע"י $\sigma H a=\sigma a$ לכל $a\in A^H$ (אין תלות בנציגים כי $a\in A^H$). לכן אם A הוא G-מודול מושרה אז A^H הוא G/H מודול מושרה. סקיצה להוכחה – $G=\dot{\bigcup}_{i=1}^{n}Hs_i=\dot{\bigcup}_{i=1}^{n}s_iH$.

$\sigma=hs_i$ (תיאור יחיד), $a=\sum_h\sum_i hs_ib_{h,i}$. אם $a\in A^H$ הוא מהצורה $\sum_i s_i\underbrace{N_Hb_i} = \sum_i N_Hs_ib_i$, $a=\sum_i(s_iH)c_i$ עבור $c_i\in N_HB$

בפרק הבא – כל $\boxed{\hat{N}_HB}$ G-מודול ניתן לשיכון ב-G מודול מושרה והוא מנה של G-מודול מושרה.