

22/1/15

פרק 28 - הצתקת ארלין

① סדר חלופי של שדה

אבל שדה A , $sep K \leq K^a$ הוא השדה המצטב $\bar{K}$ של ההרחקות (אלוה) סופיות) החלופיות של A . זה גם האינדוקציה של K , וההרחקה המלאה חלופיות: $G(L/K) = \lim_{\leftarrow} G(L/K^a)$. מכאן והלאה A שדה מקומי.

(2) יהי A שדה מקומי. אז לכל הרחבה חלופיות סופית מוגדר סתם שאריות הנורמה בצורה $G(L/K) \xrightarrow{(L/K)^a} G(L/K^a)$ עם $G(L/K)^{ab} = G(L/K)$.
 אם M/K חלופיות, $L \subseteq M$, אז $(L/K)^a = (L/K^a)^a$ כי התהליך

מסקנה/הצתקה ק"ז הוא של חבורת $G(K^a/K)$ $Art_K: K^* \rightarrow G(K^a/K)$ כך
 שכל הרחבה חלופיות סופית L/K , $Art(L/K) = (x, L/K)$

[כדי להוכיח יחידות מספיק יחידות הצתקת ארלין]
 כחולת Art על טורחות

אם L/K חלופיות סופית אז לכל $x \in N_{L/K}$, $Art(x)_L = id_L$.
 בדיקה $Art(x)_L = (x, L/K) = id_L$ כי $x \in N_{L/K}$.
 (3) צמצום על הסדר הוא מסוג

④ נסמן $\sigma_K = \sigma$ ראשוני של A . אז לכל הרחבה לא מוגמרת L/K :

$$(Art(\sigma|_{K^a})|_L = Art(\sigma|_L = (\sigma, L/K) = \varphi_{L/K} = \varphi_K|_L$$

ולכן $Art(\sigma|_{K^a}) = \varphi_K$ (כל σ ראשוני של A)

⑤ אם $u \in N_{K^a/K}$ אז $Art(u|_{K^a}) = id_{K^a}$. בדיקה $Art(u|_{K^a}) = (u, K^a/K) = id_{K^a}$ כי $u \in N_{K^a/K}$.
 וכן $Art(u|_{K^a}) = (Art(\sigma|_{K^a})|_{K^a})|_{K^a} = id_{K^a}$.
 $\varphi_K \varphi_K^{-1} = id_{K^a}$

⑥ מסקנה $Art(x|_{K^a}) = \varphi_K^{v(x)}$ כאשר $x \mapsto v(x)$ ההערכה המצריכית

בדיקה קיים $u \in K^a$ עם $x = u \cdot \pi^{v(x)}$ וההערכה טבעית $N - (N) \rightarrow (N)$.

⑦ אפיון הצתקת ארלין

הכנה: סימונים לכלי חבורות של יחידות בשדה מקומי

יהי A שדה מקומי. הערך $u = u_x = \{a \in A \mid |a| = 1\}$ נשם $|a| \leq 1$ שם $|a| < 1$

אם $|a|=1$ אז $1 < |a-1| = |a^{-1}-1|$. נגדיר $U = \{a \in K \mid |a-1| \leq |a|^{-n}\}$

$$U^{(n)} = 1 - \varphi^n = 1 - \sigma^n \Theta = \{a \in K \mid |a-1| \leq |a|^{-n}\}$$

תת חבורה של U ו- $\{U^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ קסיס אסמיות של U . כמו כן

$U^{(n)}$ פתוחה ב- K וכן $U^{(n)} \cdot U^{(m)} \subseteq U^{(n+m)}$ תת חבורה פשוטה

אנדרקס סופי (כי לא מוכלת ב- $U^{(n)}$). לכן קיימת הרחבה

חילופית סופית R/K עם $N_R = U^{(n)} \cdot U^{(m)}$, R/K מ' אחלוטין כי $U^{(n)} \cdot U^{(m)}$

מכילה ראשוני של K .

משפט יהי K שדה מקומי, אז ק"מ וידי' $\text{Art}: K^* \rightarrow G(K^b/K)$ הוא

סר ϕ - $\phi(K^*) = \text{Art}(K^*)$ (כ) אם K^* חילופית סופית מ'

$$\text{Art}(N_{K/K^*} L^*) = \text{id}_L$$

נסקוט (א) אם L חילופית סופית, הוא צד מקיים (כ) אם יש הוא מוסר

$$\text{Art}(L^*) \xrightarrow{N_{K/L}^*} G(L^*/K^*) \xrightarrow{\text{Art}(L^*)} G(L/K)$$

(ב) יהי K שדה מקומי. אז מוסר ההוא (L^*/K^*) :

$$K^* \xrightarrow{(-, L/K)} G(L^*/K^*) \xrightarrow{(-, L/K)} G(L/K)$$

(1) אנברציה $K^* \xrightarrow{(-, M/K)} G(M/K)^{ab}$ חילופי $(K \subseteq L \subseteq M)$ שואה סופיות

$$\begin{array}{ccc} K^* & \xrightarrow{(-, M/K)} & G(M/K)^{ab} \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow \text{מורחב} \\ K^* & \xrightarrow{(-, L/K)} & G(L/K)^{ab} \end{array}$$

(2) קו-צמצום $L^* \xrightarrow{(-, M/L)} G(M/L)^{ab}$ חילופי $(K \subseteq L \subseteq M)$ שואה סופיות

$$\begin{array}{ccc} L^* & \xrightarrow{(-, M/L)} & G(M/L)^{ab} \\ N_{K/L} \downarrow & & \downarrow \text{מורחב} \\ K^* & \xrightarrow{(-, M/K)} & G(M/K)^{ab} \end{array}$$

(3) מרוכנוס - אם A/L מ' $(K^b/K)^{ab} = (K^b/L^*)^{ab}$ (כאשר K^b ראשוני של K).

הסבר נציב $L=M$ ונקבל $(K^b/L^*)^{ab} \subseteq \text{Ker}(\text{Art}) \subseteq N_{K/L}^*$ ודי אדרוש במקום

2 את התג' הזה (טנסון ב-2) L/K חילופית מ' אחלוטין

כזת בעצרת תרשים אנברציה $K^* \xrightarrow{(-, L/K)} G(L^*/K^*) \xrightarrow{(-, L/K)} G(L^b/K)$ נקבל "שני" ארטין שני, בעזרת ארטין.

הוכחת המשפט:

היינו Art מק"מ ϕ - (א) ϕ , צי' יחידות. יהי A הוא המקיים

(ב), (ג), ומוכיח ל- A נקבע ביחידות. K נקבע צ'י ראשוני

אכן קי' הוכיח ל- $A(\sigma)$ נקבע באופן יחיד ל- σ ראשוני נתון.

אצורק זה די אהובים $A(\mathcal{U})_L$ נקבע כיחידות לכל $\mathbb{Z}/k$ חילופית
 סופית $(N^L:k) < \infty$ ולכן ק"י סגור $\mathcal{U} \in N_L$ בק $\mathbb{Z}$ - N_L אבן N_L
 פתוחה ולכן ק"י לבד $\mathcal{U}^{(n)} \subseteq N_L$ אם $\mathcal{U}^{(n)} = \mathcal{U} \cdot \langle \mathcal{U} \rangle = \mathcal{U} \cdot \langle \mathcal{U}^{(n)} \rangle$
 $\mathcal{U}^{(n)} \subseteq N_L$, ומהתק"ס $\mathcal{U} \cdot \langle \mathcal{U} \rangle = N_{k_j}$ כפי שראינו וק"י R/k
 חילופית סופית N אחלוטין עם $\mathcal{U}^{(n)} \cdot \langle \mathcal{U} \rangle = N_R$. לכן $N_{Rk_j} = N_R / N_{k_j} \subseteq N_L$
 ולכן $\# Rk_j \leq L$, ודילמוכיה $\mathcal{U} \cdot \langle \mathcal{U} \rangle = N_{k_j}$ ו- $\mathcal{U} \cdot \langle \mathcal{U} \rangle = N_R$ נקבע כיחידות .
 אבן $\mathcal{U}^{(n)} \cdot \langle \mathcal{U} \rangle = N_{k_j} / k$. (א) $\mathcal{U} \cdot \langle \mathcal{U} \rangle = N_{k_j}$ נקבע כיחידות , ו- $\mathcal{U} \cdot \langle \mathcal{U} \rangle = N_R$
 ולכן $\mathcal{U} \cdot \langle \mathcal{U} \rangle = N_R$. (ב) $\mathcal{U} \cdot \langle \mathcal{U} \rangle = N_R$ כנדרש , נג N סופית כיחידות .