20/1/15

W1303

קוהומולוגיות

פרק 27 - חבורות נורמות

① $N_L = N_{L/K}L^* \subseteq K^*$ (L/K ג' סופית). נאמר ש- $\Gamma \subseteq K^*$ ח' נורמות אם היא N_L ל- L/K ג' סופית כלשהי.

תכונות אינדקס: ~~...~~ $(K^*:N_L) \mid [L:K]$

בפרט סופי.

ושוויון אמם L/K חילופית.

הוכחה $G(L/K) \xrightarrow{\text{מנה}} G(L/K)^{ab} \overset{\text{קנוני}}{\cong} \frac{K^*}{N_L}$

מסקנה - קיים n כך ש- $K^{*n} \subseteq N_L$.

תכונות פתיחות

הערות ① במקרה של שדה מספרים ($char=0$) נוכיח בהמשך שכל K^{*n} פתוחה ולכן N_L פתוחה אוטומטית.

② $\Gamma \subseteq K^*$ פתוחה $\Longleftrightarrow$ $\Gamma \cap U_K$ פתוחה.

③ יה' π ראשוני. אז Γ תת"ח פתוחה מאינדקס סופי אמם $\Gamma\cap U_K$ פתוחה ו- $\Gamma \not\subseteq U_K$ אמם $\Gamma \cap U_K$ פתוחה ו- Γ מכילה איבר $u\pi^n$ עם $u\in U_K$ ו- $n\neq 0$ (זה האיבר שלא ב- U_K).

④ אם L/K הרחבה של שדות מקומיים $N_{L/K}$ רציפה.

הוכחה $B=\{r_1,\dots,r_n\}$ בסיס של L/K. לכל $r\in L$ נסמן $T_r: x\mapsto rx$, אז $N_{L/K}(r)=\det[T_r]_B$ ו- $r\mapsto T_r$ K-לינארית.

K-לינארית

לבסוף, $[\;]_B: \to K^n$ רציפה ודטרמיננטה זה פולינום ובפרט רציפה.

מסקנה L/K גלואה $\Leftarrow$ $N_L \subset K^*$ פתוחה.

הוכחה $(N_{L/K}L^*)\cap U_K = N_{L/K}U_L$. מאחר שהאינדקס של N_L ב- K^* סופי $(U_K:N_{L/K}U_L)=(U_K:N_L\cap U_K)<\infty$. $N_{L/K}$ רציפה מ- U_L ל- U_K, U_L קומפקטית ו- U_K האוסדורף ולכן $N_{L/K}U_L$ תת"ח סגורה ב- U_K אבל היא מאינדקס סופי ולכן גם תת"ח פתוחה $\Leftarrow$ N_L פתוחה ב- K^*.

דוגמה K_f/K לא מסועפת מדרגה f. ראינו $U_K=N_{L/K}U_L$ ולכן $N_{K_f}=N_{K_f/K}(\langle\pi\rangle U_L)=\langle\pi^f\rangle U_K$ כאשר π ראשוני של K $\Leftarrow$ של L. ואכן, $(K^*:N_{K_f})=f$.

② מעבר להרחבות חילופיות

ⓐ אם L/K גלואה, $G=G(L/K)$, $L^{ab}=Fix(G')$ אז L^{ab}/K גלואה.

חילופית ומתפרדת ~~[illegible]~~ גלואה יש איזו׳ $G(L/K)^{ab} = G/G' \xrightarrow[\text{מצמצום}]{\text{מושרה}} G(L^{ab}/K)$. אם

$K\subset N\subset L$ עם N/K חילופית, $N\subseteq L^{ab}$ (כי $G'|_N \subseteq (G(N/K))' = 1$ ולכן

$N\subseteq \mathrm{Fix}\, G' = L^{ab}$).

ⓓ מתרשים אינפלציה נקבל

$$\begin{tikzcd}
K^* \arrow[r, "{(\cdot, L/K)}"] \arrow[d, "id"'] & G(L/K)^{ab} \arrow[d, "\text{מושרה מצמצום}"] \arrow[dr, "\text{מושרה מצמצום}", "\sim"'] & \\
K^* \arrow[r, "{(\cdot, L^{ab}/K)}"'] & G(L^{ab}/K)^{ab} = G(L^{ab}/K) &
\end{tikzcd}$$

כל, זה הצמצום
זיהוי ולכן שוויון...

ולכן $N_L = \mathrm{Ker}(\cdot, L/K) = \mathrm{Ker}(\cdot, L^{ab}/K) = N_{L^{ab}}$.

<u>מסקנות</u> ⓐ משפט החסם (Limitation thm.) $N_L = N_{L^{ab}}$.

ⓑ בחיפוש חבורות נורמות אפשר להסתפק רק בהרחבות חילופיות

③ <u>יחסי הכלה</u>

① מכאן והלאה בפרק זה, נדון ~~[illegible]~~ בהרחבות חילופיות - ושם $[K^*:N_L]=[L:K]$

② כל תת"ח של K^* שמכילה חב׳ נורמות היא חב׳ נורמות.

<u>הוכחה</u> תהי $N_L\subseteq \Gamma\subseteq K^*$ עם L/K חילופית סופית. אז $\Gamma \supseteq N_L = \mathrm{Ker}(\cdot, L/K)$

ונסמן $G_1 = G(\Gamma, L/K) \subseteq G$, אז $\Gamma = (\cdot, L/K)^{-1}G_1$ לפי זה. G חילופית ולכן

$G_1 \triangleleft G$. נסמן $L_1 = \mathrm{Fix}\, G_1$ אז L_1/K גלואה, נראה $\Gamma = N_{L_1}$.

אכן, ל-$\gamma\in K^*$ מתקיים $\gamma\in\Gamma \Leftrightarrow (\gamma, L/K)\in G_1 \Leftrightarrow (\gamma,L/K)|_{L_1} = id_{L_1} \Leftrightarrow$

$(\gamma, L_1/K) = id_{L_1} \Leftrightarrow \gamma\in \mathrm{Ker}(\cdot, L_1/K) = N_{L_1}$.

<u>טענה</u> יהי k שדה מקומי. ההעתקה $\left\{\begin{matrix}\text{הרחבות } L/K\\ \text{חילופיות}\\ \text{סופיות}\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{ח׳ נורמות}\\ \text{ב-}L^*\end{matrix}\right\}$, $L \longmapsto N_L$ היא חח"ע

(וע"ל לפי ההגדרה) ולכל זוג הרחבות $L_1/k, L_2/k$ חילופיות

א) $L_1\subseteq L_2 \Leftrightarrow N_{L_1}\supseteq N_{L_2}$.

ב) $N_{L_1L_2} = N_{L_1}\cap N_{L_2}$.

ג) $N_{L_1\cap L_2} = N_{L_1}N_{L_2}$.

<u>הוכחה</u> יהי $\gamma\in N_{L_1}\cap N_{L_2}$. מתרשים אינפלציה $(\gamma, L_1L_2/K)|_{L_1} = (\gamma, L_1/K) = 1$ ובדומה ל-L_2

ולכן $(\gamma, L_1L_2/K) = 1$ ו-$\gamma\in N_{L_1L_2}$. ~~[illegible]~~ נשים לב

ש-$L_1\subseteq L_2$ גורר $N_{L_2} = N_{L_2/K}L_2^* = N_{L_1/K}N_{L_2/L_1}L_2^* \subseteq N_{L_1/K}L_1^* = N_{L_1}$.

בפרט $L_1,L_2\subseteq L_1L_2$ ומכאן ש-$N_{L_1L_2}\subseteq N_{L_1}\cap N_{L_2}$ והוכחנו שוויון בב. לא׳

נניח בכיוון שני $N_{L_1}\supseteq N_{L_2}$, אז מב׳ $N_{L_1L_2} = N_{L_2}$ ולכן $[L_1L_2:K]=[L_2:K]$

ומכאן $L_1L_2 = L_2$ ו-$L_1\subseteq L_2$. זה נותן כיוון שני לא׳ ומכך נקבל שזו העתקה חח"ע.

מכח ג׳ - $N_{L_1}\subseteq N_{L_1}\cdot N_{L_2}$ ולכן זו חבורת נורמות של L/K כלשהי!

ו-M/K סופית חילופית כלשהי, ישנן השקילויות הבאות:

$M\subseteq L \iff N_M\supseteq N_L=N_{L_1}N_{L_2} \iff N_M\supseteq N_{L_1}$ וגם $N_M\supseteq N_{L_2} \overset{(א)}{\iff} M\subseteq L_1,L_2 \iff M\subseteq L_1\cap L_2$.

מאחר ו-$L_1\cap L_2/K$ חילופית סופית, נקבל ע"י $M=L, M=L_1\cap L_2$

ש- $L=L_1\cap L_2$ ולכן $N_{L_1}N_{L_2}=N_{L_1\cap L_2}$.

③ <u>הרחבות לא מסועפות ומסועפות לחלוטין</u>

(א) L/K חילופית סופית, L/K לא מסועפת אמ"מ $U_K\subseteq N_L$.

(ב) <u>תת הרחבה לא מסועפת מקסימלית</u>

L/K חילופית סופית, π ראשוני של K, L_0/K תת הרחבה לא מס' מקסימלית. לכל $f=1,2,\dots$ מתקיימות השקילויות

$k_f\subseteq L_0 \iff k_f\subseteq L \iff N_{K_f}\supseteq N_L \iff \langle\pi^f\rangle U_K\supseteq N_L$. לכן $L_0=K_f$

עבור $f=f_{L/K}$ הוא המס' הטבעי הקטן ביותר כך ש- $\langle\pi^f\rangle U_K\supseteq N_L$.

תיאור בשפת הערכה מעריכית: $v: K^*\simeq\langle\pi\rangle\cdot U_K\to\mathbb{Z}$ אז

(מאינדקס סופי) $0\neq v(N_L)\subseteq\mathbb{Z}$ תת חבורה נוצרת ע"י $1\le f\in\mathbb{Z}$, $K_f=L_0$.

(ג) <u>הרחבות מס' לחלוטין</u>

<u>טענה</u> L/K חילופית סופית, אז L/K מסועפת לחלוטין אמ"מ N_L מכילה ראשוני של K.

<u>הוכחה</u> זה שקול ל- $f=1 \iff v(N_L)=\mathbb{Z} \iff 1\in v(N_L) \iff N_L$ מכילה ראשוני של K.

④ <u>K^{*n}</u>

<u>טענה</u> K שדה מקומי, n טבעי, $\mathrm{char}\,K\nmid n$ (בפרט ב-$\mathrm{char}\,K=0$) אז K^{*n} פתוחה.

<u>מסקנות</u> (א) במצב זה $(K^*:K^{*n})<\infty$ כי זו תת חבורה פתוחה ו- $\pi_K^n\in K^{*n}$.

(ב) סמל הילברט רציף (ואז קבוע על קוסטים של K^{*n}).

<u>הוכחה</u> נסמן $0\neq \underbrace{n=1_K+\dots+1_K}\in O_K\subseteq K$ ונסמן $\nu=v(n)$, כלומר $|n|=|\pi|^\nu$

לכן $n=\pi^\nu u$ עם $u\in U_K$. נראה ש- $1+\pi^{2\nu+1}O_K\subset K^{*n}$ פתוחה.

יהי $1+a\pi^{2\nu+1}\in 1+O_K\pi^{2\nu+1}$ ו- $a\in O_K$. נחפש $x\in O_K$ כך ש- $(1+x\pi^{\nu+1})^n=1+a\pi^{2\nu+1}$

כלומר נחפש פתרון ל- $(1+a\pi^{2\nu+1})=1+nx\pi^{\nu+1}+\dots=1+xu\pi^{2\nu+1}+x^2\pi^{2\nu+2}h(x)$ ו- $h(x)\in O_K[x]$

כלשהו. לכן יש לפתור $g(x)=u^{-1}\pi h(x)x^2+x-u^{-1}a=0$ עם $g\in O_K[x]$ ו-

פירוק $\bar g(x)=(x-\bar u^{-1}\bar a)\cdot 1$ ולפי הלמה של הנזל (מהו) $g(x)=(x-\alpha)(\dots)$

עם $\bar\alpha=\bar u^{-1}\bar a$ ולכן ל-g יש שורש α ב-O_K

5) משפט קיום

א) ניסוח המשפט

משפט K שדה מקומי, $\Gamma\subseteq K^*$ תת חבורה. אז Γ ח' נורמות $\Leftrightarrow$ Γ פתוחה ו- $(K^*:\Gamma)<\infty$. הערה הוכחנו $\Leftarrow$.

הערה ל- אם $\Gamma\subseteq K^*$ מאינדקס סופי אז ממשפט קודם היא פתוחה. לכן

משפט בשדה מקומי ממציין 0, $\Gamma\subseteq K^*$ תת"ח. Γ חב' נורמות $\Leftrightarrow$ אינדקס סופי.

משפט K שדה מקומי, $\mathrm{char}K\nmid m$, אז K^{*m} תת"ח נורמות.

הערה נובע מיד משפט קיום במציין 0 (כי $n=(K^*:\Gamma)<\infty \Rightarrow K^{*n}\subseteq\Gamma$ ח' נורמות).

הוכחה ראינו K^{*n} פתוחה, $U_K^n\subseteq K^{*n}$ ולכן $l:=(K^*:K^{*n})<\infty$.

חלק ראשון נניח $\mu_n\subseteq K^*$ שורשי יחידה מסדר n.

נסמן קוסטים $K^*=\bigcup_{i=1}^{l} b_i K^{*n}$, אז לכל $b\in K^*$ יש j כך ש- $b\in b_jK^{*n}$

ולכן $K(\sqrt[n]{b})=K(\sqrt[n]{b_j})$. נסמן $L=K(\sqrt[n]{b_1},\dots,\sqrt[n]{b_l})$ הרחבה חילופית סופית.

אז לכל $b\in K^*$, $K_b=K(\sqrt[n]{b})\subseteq L$ ולכן $N_L\subseteq N_{K_b}$, מכאן ש-

$N_L\subseteq\bigcap_{b\in K^*}N_{K_b}\overset{\text{תרגיל}}{=}K^{*n}$ ולכן K^{*n} מכילה חב' נורמות $\Rightarrow$ K^{*n} חבורת נורמות.

חלק שני במקרה כללי $M=K(\mu_n)$, אז M/K גלואה סופית ו- $\mu_n\subseteq M$.

לפי החלק הראשון יש הרחבת גלואה סופית L/M עם $N_{L/M}L^*=M^{*n}$.

תהי H/K הרחבת גלואה סופית עם $L\subseteq H$, אז

$N_{H/K}H^*=N_{M/K}N_{L/M}N_{H/L}H^*\subseteq N_{M/K}N_{L/M}L^*=N_{M/K}(M^{*n})\subseteq K^{*n}$ (ח' נורמות)

ולכן גם K^{*n} מכילה חבורת נורמות $\Rightarrow$ K^{*n} חבורת נורמות.