W12D5
15/1/15

קוהומולוגיה

קו-צמצום

$M \supseteq L \supseteq K$ סופיות, M/K גלואה (K מקומי). אז $\mathrm{cor}^{M/K}_{M/L} u_{M/L} = (u_{M/K})^{[L:K]}$.

תזכורת - אם $\Gamma = G(M/L)$, $G = G(M/K)$ אז $H^2(M/L) \xrightarrow{\mathrm{cor}^{M/K}_{M/L}} H^2(M/K)$, $H^2(\Gamma, M^*) \xrightarrow{\mathrm{cor}} H^2(G, M^*)$

ראינו $\mathrm{cor}\circ\mathrm{res} = (G:\Gamma)\cdot id$, $(G:\Gamma) = [L:K]$. אז,

$$\mathrm{cor}^{M/K}_{M/L} u_{M/L} = \mathrm{cor}^{M/K}_{M/L}\,\mathrm{res}^{M/L}_{M/K}\, u_{M/K} = (u_{M/K})^{[L:K]}$$

קו-צמצום וסמל שארית הנורמה

$K \subseteq L \subseteq M$ סופיות (אינה גלואה), אז יש תרשים חילופי

$$\begin{array}{ccc} L^\times & \xrightarrow{(\cdot, M/L)} & G(M/L)^{ab} \\ \downarrow N_{L/K} & & \downarrow \text{מושרה מהכלה} \\ K^\times & \xrightarrow{(\cdot, M/K)} & G(M/K)^{ab} \end{array}$$

הוכחה נשתמש בתרשים

$$\begin{array}{ccccccc} L^\times & \xrightarrow{\varkappa} & H^0(G(M/L), M^*) & \xleftarrow[\approx]{u_{M/L}\cup} & \hat H^{-2}(G(M/L),\mathbb{Z}) & \simeq & G(M/L)^{ab} \\ \downarrow N_{L/K} & & \downarrow \mathrm{cor}^0 & & \downarrow \mathrm{cor}^{-2} & & \downarrow \text{מושרה מהכלה} \\ K^\times & \xrightarrow{\varkappa} & H^0(G(M/K), M^*) & \xleftarrow{u_{M/K}\cup} & \hat H^{-2}(G(M/K),\mathbb{Z}) & \simeq & G(M/K)^{ab} \end{array}$$

ריבוע ימני חילופי מתכונות cor. בריבוע האמצעי $u_{M/L} = \mathrm{res}\, u_{M/K}$ ולכן ל-$\xi \in \hat H^{-2}(G(M/L), \mathbb{Z})$ נקבל $\mathrm{cor}(u_{M/L} \cup \xi) = \mathrm{cor}(\mathrm{res}\, u_{M/K} \cup \xi) = u_{M/K} \cup \mathrm{cor}\,\xi$.

בריבוע שמאלי, ל-$\Gamma \trianglelefteq G$ ו-A G-מודול, $\varkappa_\Gamma(a) = \varkappa_G(N_{G/\Gamma} a)$. נסמן $G = G(M/K)$, $\Gamma = G(M/L)$ ו- $d = [L:K]$ נסמן $\sigma_1, \dots, \sigma_d : L \to M$ השיכונים של L ב-M מעל K.

אז $N_{L/K} a = \prod_{i=1}^d \sigma_i a$. נניח יהיו $\tilde\sigma_1, \dots, \tilde\sigma_d$ ב-$G(M/K)$ כך ש-$\tilde\sigma_i|_L = \sigma_i$. אז $G(M/K) = \bigcup_{i=1}^d \tilde\sigma_i G(M/L)$. לכן $N_{G/\Gamma} = \sum \tilde\sigma_i$ ואז $N_{G/\Gamma} a = N_{L/K} a$, ולבסוף

$\mathrm{res}(\varkappa_{G(M/L)} a) = \varkappa_{G(M/K)}(N_{L/K} a)$.

פרק 26 - סמל הילברט

① הנחות: (1) K שדה מקומי

(2) $n \geq 1$ טבעי, $\mathrm{char}\,K \nmid n$ (בפרט מותר $\mathrm{char}\,K = 0$).

במצב זה ל-$X^n - 1$ יש n שורשים שונים ב-K^{sep} המהווים חבורה ציקלית μ_n שיוצר נקרא שורש יחידה פרימיטיבי מסדר n.

(3) מניחים $\mu_n \subseteq K$, ל-$n=2$ צריך רק ($\mathrm{char}\,K$ $\mu_2 = \{\pm 1\}$ 0 או אי-זוגי).

② יצירת קרקטרים

יהי $b \in K^\times$. אז $\chi_b : G(K^{sep}/K) \to \mu_n$ מגדיר הומ' של חבורות באופן הבא: יהי $\beta \in K^{sep}$ עם $\beta^n = b$ ונגדיר $\chi_b(\sigma) = \frac{\sigma(\beta)}{\beta} \in \mu_n$ ($\sigma \in G(K^{sep}/K)$).

χ_b מוגדר היטב: ראשית גם $\sigma(\beta)^n = b$ ולכן המנה ב-μ_n.

שנית, אם לקחנו פתרון אחר β' אז יש $\theta\in\mu_n$ עם $\beta'=\theta\beta$ ואז

$$\frac{\sigma(\theta\beta)}{\theta\beta}=\frac{\sigma(\beta)}{\beta}.$$

<u>תכונות</u> א) χ_b הומ' - אכן $\chi_b(\sigma\tau)=\frac{\sigma(\tau(\beta))}{\beta}=\frac{\sigma(\tau\beta)}{\tau\beta}\cdot\frac{\tau\beta}{\beta}=\chi_b(\sigma)\chi_b(\tau)$

כי $(\tau\beta)^n=b$.

ב) $\chi_{bc}=\chi_b\chi_c$ כי אם $\gamma^n=c$ אז $(\beta\gamma)^n=bc$ ולכן

$$\chi_{bc}(\sigma)=\frac{\sigma(\beta\gamma)}{\beta\gamma}=\frac{\sigma(\beta)}{\beta}\cdot\frac{\sigma(\gamma)}{\gamma}=\chi_b(\sigma)\chi_c(\sigma).$$

ג) נסמן $K_b=K(\sqrt[n]{b})=K(\beta)$ ל-$b\in K^*$ ו-β פתרון של $\beta^n=b$.

אז χ_b מתפרק $G(K^{sep}/K)\xrightarrow{\text{צמצום}}G(K_b/K)\xrightarrow[\text{הומ' חח"ע}]{\chi_b}\mu_n$ - אכן, $\sigma\beta=\beta$

אז $\sigma|_{K_b}=\sigma|_{K(\beta)}=id$.

③ <u>ההרחבות K_b</u>

יהי ζ שורש פרימיטיבי מסדר n של 1. אז $\mathrm{Im}\chi_b$ תת חבורה של μ_n: $\{1,\zeta^d,\dots,\zeta^{d(m-1)}\}$ עם $dm=n$.

כעת, יהי $\sigma\in G(K_b/K)$ כך ש-$\chi_b(\sigma)=\zeta^d$. אז σ יוצר את $G(K_b/K)$ ציקלית מסדר m.

<u>תכונה</u> לכל $c\in K$, $c^n-b\in N_{K_b/K}(K_b)$ - אכן

$$c^n-b=\prod_{k=0}^{n-1}(c-\zeta^k b)=\prod_{i,j=0}^{d-1,m-1}(c-\zeta^{i+jd}\beta)=\prod_{i,j=0}^{d-1,m-1}(c-\sigma^j(\zeta^i\beta))=\prod_{i,j=0}^{d-1,m-1}\sigma^j(c-\zeta^i\beta)=\prod_{i=0}^{d-1}N_{K_b/K}(c-\zeta^i\beta)$$

מכפלה של נורמות ולכן נורמה.

④ <u>סמל הילברט</u>

בהנחות של הפרק, נגדיר תבנית $(\,,\,):K^*\times K^*\to\mu_n$, $(a,b)=\chi_b(a,K(\sqrt[n]{b})/K)=$

$$\frac{(a,K(\sqrt[n]{b})/K)(\beta)}{\beta}\in\mu_n.$$

<u>הערות</u> ① $(a,K_b/K)\in G(K_b/K)^{ab}=G(K_b/K)$ כי ההרחבה ציקלית $\Leftarrow$ חילופית.

② לכל הרחבת גלואה חילופית L/K עם $L\supseteq K(\sqrt[n]{b})$,

מתקיים $\chi_b(a,L/K)=\chi_b((a,L/K)|_{K_b})=\chi_b(a,K_b/K)=(a,b)$.

<u>תכונות</u> ① $(aa',b)=(a,b)(a',b)$ כי $a\mapsto(a,K_b/K)$ הומ'.

② $(a,bb')=(a,b)(a,b')$ - נסמן $L=K(\sqrt[n]{b},\sqrt[n]{b'})$ אז

$$(a,bb')=\chi_b(a,L/K)\chi_{b'}(a,L/K)=(a,b)(a,b')$$

③ $(a,b)=1 \iff a\in N_{K_b/K}(K_b^*)$ כי על $G(K_b/K)$,

χ_b חח"ע, ולכן $(a,b)=1 \iff (a,K_b/K)=1 \iff$

$a\in\ker(\,,K_b/K) \iff a\in N_{K_b/K}(K_b^*)$.

4 לכל $b\neq 0$ ו- $c\in K$ כך ש- $c^n-b\neq 0$, $(c^n-b,b)=1$ כי ראינו

שלב נורמה). בפרט, לכל $a\neq 0,1$ $(a,1-a)=(1^n-(1-a),1-a)=1$

ולכל $a\neq 0$ $(a,-a)=(0^n-(-a),-a)=1$

4 $(a,b)=(b,a)^{-1}$. אכן, $1=(ab,-ab)=(a,-ab)(b,-ab)=$

$=(a,-a)(a,b)(b,a)(b,-b)=(a,b)(b,a)$.

5 א $(K^*,b)=1 \iff b\in(K^*)^n$.

ב $(a,K^*)=1 \iff a\in(K^*)^n$.

<u>הוכחה</u> לפי 4 ברור א $\Leftarrow$ ב. יהי β פתרון של $x^n=b$

אז $(K^*,b)=1 \iff \forall a\in K^*, (a,K(\beta)/K)\beta=\beta \iff$

$\iff G(K(\beta)/K)\beta=\beta \iff \beta\in K^* \iff b\in(K^*)^n$

<u>מסקנות</u> א $\bigcap_{b\in K^*} N_{K_b/K}(K_b^*)=(K^*)^n$

<u>הוכחה</u> $a\in(K^*)^n \iff (a,K^*)=1 \iff (\forall b\in K^*)\, a\in N_{K_b/K}(K_b^*)$

ב ניתן לפרק את $(\ ,\ )$ בצורה

$K^*\times K^* \longrightarrow \frac{K^*}{(K^*)^n}\times\frac{K^*}{(K^*)^n} \longrightarrow \mu_n$.