W11
D5
8/1/15

קוהומולוגיה

למת הצמצום - יש תרשים של הרחבות של גלואה סופית

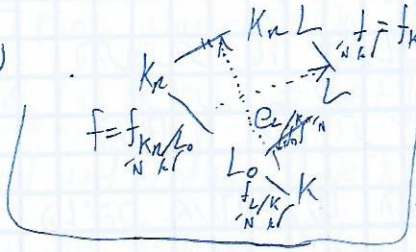
ש קבוצת מקומיים, K_n/K לא מסוימת מסדר n. אנחנו יודעים שאם K_nL/L לא מסוימת. נניח גם $L_0 \subset K_n$, כלומר אז $f_{L/K}$ נסמן הרחבה $T: H^2(K_n/K) \xrightarrow{inf} H^2(K_nL/K) \xrightarrow{res} H^2(K_nL/L)$

א) אם $inv_L \circ T = [L:K] inv_K$

ב) $Tu_{K_n/K} = (u_{K_nL/L})^{e_{L/K}}$

בפרט, אם $n=[L:K]$ אז ג) $T=1$.

הוכחה יש תרשים. נבדוק ב) ← ג) ← א).



ג) ← ב) בג) מניחים $n=[L:K]$.

ולכן $f=e_{L/K}$. מכאן ל-

$e_{L/K}=f_{K_n/L_0}=[K_nL:L]=|G(K_nL/L)|$. מאחר ל- $u_{K_nL/L}\in H^2(K_nL/L)$ מפה

ל- $(u_{K_nL/L})^{e_{L/K}}=1$ ולכן $Tu_{K_n/K}=1$ ומאחר ל- u יוצר את $H^2(K_n/K)$

נסיק $T=1$. (ס בסימון חיבורי)

ל- ב) ← א) כדי להראות את 2 אנחנו אז על $u_{K_n/K}$. זה "תן

$Tu_{K_n/K}=e_{L/K}\, inv_T u_{K_nL/L} = \frac{e_{L/K}}{f_{K_n/L_0}} = \frac{e_{L/K}}{f_{K_n/L_0} f_{L/K}} = \mathbb{Z}$ ולכן אכן נותן בדיוק inv_L

$\frac{[L:K]}{[K_n:K]} = \mathbb{Z} = [L:K](inv_K u_{K_n/K})$. לכן מספיק להוכיח רק את ב).

ב) יהי π_K ראשוני של K. אז $u_{K_n/K}$ מוגדר ע"י הקוצקלוס $f(\varphi^i_{K_n/K}, \varphi^j_{K_n/K}) = \begin{cases} \pi & i+j\geq n \\ \pi_K & o/w \end{cases}$.

לכן $inf^{K_nL/K}_{K_n/K} u_{K_n/K}$ מוגדר ע"י $g(\sigma,\tau)=f(\sigma|_{K_n}, \tau|_{K_n})$ ולכן $Tu_{K_n/K}$ מוגדר ע"י

$h(\varphi^i_{K_nL/L}, \varphi^j_{K_nL/L}) = f(\varphi^i_{K_nL/L}|_{K_n}, \varphi^j_{K_nL/L}|_{K_n})$ $0\leq i,j<f-1$ (אנחנו יודעים איך פרובניוס

מתנהג בהרחבות - $\varphi_{K_nL/L}|_{K_n} = \varphi^{f_{L/K}}_{K_n/K}$ ולכן זה שווה ל- $f(\varphi^{if_{L/K}}_{K_n/K}, \varphi^{jf_{L/K}}_{K_n/K}) = \begin{cases} 1 & (if_{L/K}+jf_{L/K})\geq n \\ \pi_K & o/w \end{cases}$. אבל $n=f\cdot f_{L/K}$ ולכן זה כמו $\begin{cases} \pi & i+j\geq f \\ \pi_K & o/w \end{cases}$.

זה קוצקלוס $\mathbb{Z}_{\pi_K}$ שמוגדר ב- $H^2(K_nL/L)$ שמתאים ל- $N_{K_nL/L}(K_nL)^*$ ב- $H^0(K_nL/L)$.

נותר למצוא $0\leq t<f$ כך ש- $\pi_K N_{K_nL/L}(K_nL)^* = \pi_L^t N_{K_nL/L}(K_nL)^*$ ואז h מוגדר את $(u_{K_nL/L})^t$.

נרצה להוכיח $t=e_{L/K}$. אבל $|\pi_K| = |\pi_L|^{e_{L/K}}$ ולכן $\pi_K \in \pi_L^{e_{L/K}} U_L$ אבל זה

מוכל ב- $\pi_L^{e_{L/K}}(N_{K_nL/L}(K_nL)^*)$ כי K_nL/L לא מסוימת ולכן $t=e_{L/K}$.

3) H^2 של הרחבות גלואה סופיות

משפט תהי L/K גלואה סופית של שדות מקומיים, $n=[L:K]$.

תהי K_n/K הרחבה הלא מסחרית מסדר n. הרי מתקיים

Ⓐ $\mathrm{inf}_{L/K}^{K_nL/K} H^2(L/K)$ Ⓑ $\mathrm{inf}_{K_n/K}^{K_nL/K} H^2(K_n/K)$ מהות תת־חבורות ב־$H^2(K_nL/K)$.

הוכחה לפי Ⓒ במשפט הקודם $Ⓑ \subseteq \mathrm{Ker}\, \mathrm{res}_{K_nL/L}^{K_nL/K}$. נשתמש בסדרה המדויקת $1 \to H^2(L/K) \xrightarrow{\mathrm{inf}_{L/K}^{K_nL/K}} H^2(K_nL/K) \xrightarrow{\mathrm{res}_{K_nL/L}^{K_nL/K}} H^2(K_nL/L)$ כדי לקבל $Ⓑ \subseteq \mathrm{Im}\, \mathrm{inf}_{L/K}^{K_nL/K} H^2(L/K) = Ⓐ$.

אבל inf חח"ע ולכן $|Ⓑ| = |H^2(K_n/K)| = n$ בהרחבה לא מסחרית, ומהא שיוון היסודי השני $|Ⓐ| = |H^2(L/K)| \le [L:K] = n$ ולכן $Ⓑ = Ⓐ$.

ב) מסקנות

משפט 1 K שדה מקומי, L/K גלואה סופית מסדר n אז התמונות של $H^2(L/K)$ ו־$H^2(K_n/K)$ ב־B_K מהות ובפרט $H^2(L/K)$ דיקלית מסדר n.

הגדרה האיבר $u_{L/K} \in H^2(L/K)$ המקיים $u_{L/K} = u_{K_n/K}$ ב־B_K נקרא האיבר היסודי ב־$H^2(L/K)$.

תכונות 1) $u_{L/K}$ יוצר את $H^2(L/K)$.

2) אם L/K לא מ' אז הוא להגדרה המקורית.

משפט 2 יהי K שדה מקומי. ההכלה $H^2(K^{sep}/K) \subseteq H^2(K^u/K)$ היא שוויון – כלומר $B_K = H^2(\frac{K^{sep}}{K}) = H^2(\frac{K^u}{K})$.

משפט 3 הפונקציה הבאה יוצרת איזומורפיזם (הנקראת שוב inv_K) שמקיים אז:

$$\mathrm{inv}_K : B_K = H^2(K^{sep}/K) = H^2(K^u/K) \xrightarrow[\text{מסדר מסוים}]{\mathrm{inv}_K \text{ על}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

לעצה K מקומי, L/K גלואה סופית – ע"י דמבדים תחום וטוות נקבל איזו $\mathrm{inv}_{L/K} = \mathrm{inv}_K|_L : H^2(L/K) \to \frac{\mathbb{Z}}{[L:K]} \subseteq \mathbb{Z}$.

הערה $H^2(L/K)$ דיקלית מסדר $[L:K]$.

תכונה אם $K \subseteq L \subseteq M$ גלואה סופית אז $\mathrm{inv}_{M/K} \circ \mathrm{inf}_{L/K}^{M/K} = \mathrm{inv}_{L/K}$ כי בתחבורת בראו אר inf זו פשוט מהות.

לעצה $u_{L/K}$ האיבר היחיד ב־$H^2(L/K)$ עם $\mathrm{inv}_K u_{L/K} = \frac{1}{[L:K]} + \mathbb{Z}$.

הוכחה נסמן $n = [L:K]$. אז $\mathrm{inv}_K u_{K_n/K} = \frac{1}{n} + \mathbb{Z}$. $\mathrm{inv}_K u_{L/K} = \mathrm{inv}_K u_{K_n/K}$.

לעצה (פעולת inf על איברים יסודיים) $K \subseteq L \subseteq M$ גלואה סופיות, אז ב־$H^2(M/K)$ (ולכן גם ב־B_K) $\mathrm{inf}_{L/K}^{M/K} u_{L/K} = u_{M/K}^{[M:L]}$

הוכחה $\mathrm{inv}_K(\mathrm{inf}_{L/K}^{M/K} u_{L/K}) = \mathrm{inv}_K u_{L/K} = \frac{1}{[L:K]} + \mathbb{Z} = [M:L]\left(\frac{1}{[M:K]} + \mathbb{Z}\right) + \mathbb{Z} =$

$= [M:L]\, \mathrm{inv}_K u_{M/K} = \mathrm{inv}_K(u_{M/K}^{[M:L]})$.